

Kaartenhuis

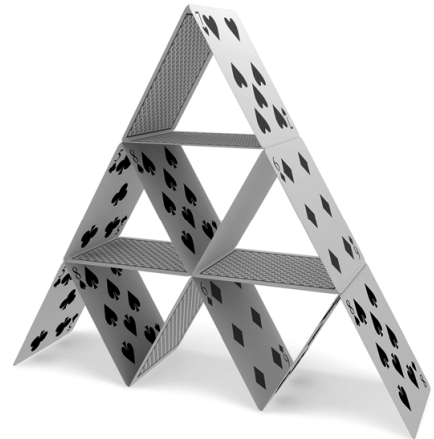
Door speelkaarten op elkaar te stapelen, kan je een kaartenhuis bouwen.
Op de foto zie je een kaartenhuis van drie lagen.

Het kaartenhuis op de foto is gebouwd volgens de zogeheten **driehoeksconstructie**. Bij de driehoeksconstructie ga je als volgt te werk:

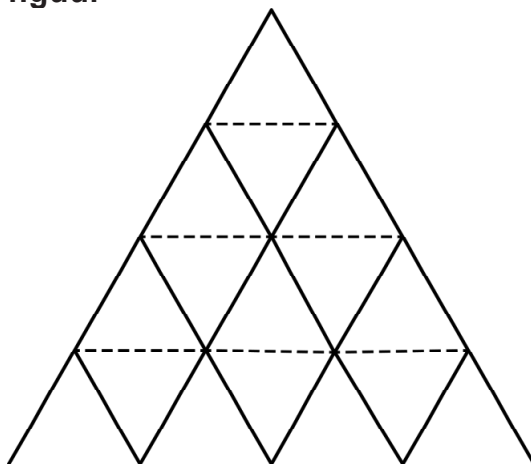
- Zet steeds naast elkaar twee kaarten schuin tegen elkaar (de zwarte lijnstukken in de figuur hieronder).
- Leg een kaart op de toppen (de gestippelde lijnstukken in de figuur).
- Ga door tot het kaartenhuis af is.

In de figuur is dit schematisch weergegeven voor een kaartenhuis van vier lagen.

foto



figuur



laag 1

laag 2

laag 3

laag 4

In deze opgave beschouwen we kaartenhuizen die volgens de driehoeksconstructie zijn gebouwd.

Zowel het aantal staande kaarten als het aantal liggende kaarten in een laag vormt een rekenkundige rij. Door voor beide aantallen een directe formule op te stellen, kan een directe formule voor het totaal aantal kaarten in een laag gevonden worden.

Deze formule is $K(n) = 3n - 1$, met $K(n)$ het totaal aantal kaarten in de n -de laag. De liggende kaarten horen bij de laag waarop ze liggen, dus de bovenste liggende kaart in de figuur hoort bij laag 2.

- 2p 13 Stel voor zowel de staande kaarten als voor de liggende kaarten in de n -de laag een directe formule op en toon daarmee aan dat $K(n) = 3n - 1$.

Het totaal aantal kaarten in een kaartenhuis van n lagen noemen we $T(n)$. Een directe formule hiervoor is $T(n) = \frac{3}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$.

Omdat $T(n)$ de somrij is van $K(n)$ moet gelden: $T(n) - T(n-1) = K(n)$.

- 4p 14 Toon met behulp van de formules van $K(n)$ en $T(n)$ aan dat inderdaad geldt dat $T(n) - T(n-1) = K(n)$.

Een pakje speelkaarten, inclusief jokers, bestaat uit 54 kaarten.

- 3p 15 Bereken hoeveel pakjes speelkaarten nodig zijn voor het kaartenhuis waarbij voor de onderste laag zoveel mogelijk kaarten van één pakje speelkaarten zijn gebruikt.

Met de kaarten van drie pakjes speelkaarten wordt een zo hoog mogelijk kaartenhuis gebouwd. Met de kaarten die overblijven wordt daarna een tweede zo hoog mogelijk kaartenhuis gebouwd. Zo gaat men door totdat alle kaarten op zijn of totdat er te weinig kaarten over zijn om nog een kaartenhuis te bouwen.

- 4p 16 Onderzoek met een berekening welke kaartenhuizen gebouwd zullen worden.

De formule voor $T(n)$ is te herleiden tot $T(n) = \frac{3}{2}(n + \frac{1}{6})^2 - \frac{1}{24}$.

Omdat je bij het bouwen van een kaartenhuis met de n -de laag begint, moet je van tevoren weten uit hoeveel lagen een kaartenhuis bestaat als je weet hoeveel speelkaarten je gebruikt. Daarvoor is het handig om een formule te hebben waarin n wordt uitgedrukt in T .

- 3p 17 Herleid $T = \frac{3}{2}(n + \frac{1}{6})^2 - \frac{1}{24}$ tot een formule van de vorm $n = \sqrt{aT + b} + c$. Geef de waarden van a , b en c in twee decimalen.