Examen HAVO

2021

tijdvak 3
donderdag 8 juli
9.00 - 12.00 uur

wiskunde B

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

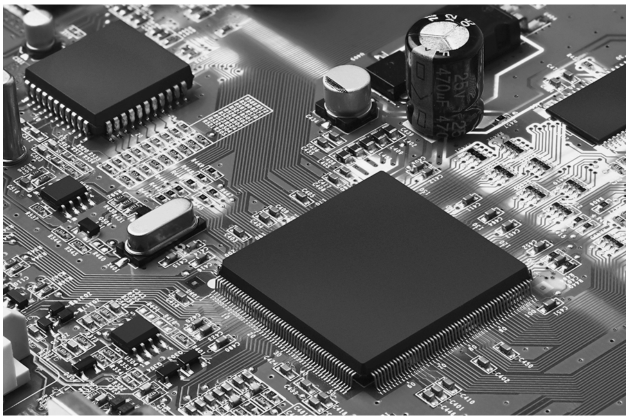
Dit examen bestaat uit 17 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 78 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Transistors en opslagcapaciteit

In een smartphone zit een processor. Zo'n processor bestaat meestal uit veel uiterst kleine transistors. Het aantal transistors in een processor is in de loop van de jaren enorm toegenomen.



Een producent van smartphones bracht in september 2013 een telefoon op de markt met een processor die 1 miljard transistors bevatte. Diezelfde producent heeft elk opvolgend jaar, steeds in september, een nieuwe telefoon uitgebracht. In 2018 bracht deze producent een telefoon uit met een processor die 6,9 miljard transistors bevatte. Neem aan dat het aantal transistors in een processor in de tussentijd exponentieel groeide en dat deze groei zich in de jaren daarna voortzette. Je kunt dan voor de telefoon die de producent in 2021 uitbrengt, berekenen hoe groot het aantal transistors is dat de processor van die telefoon zal bevatten.

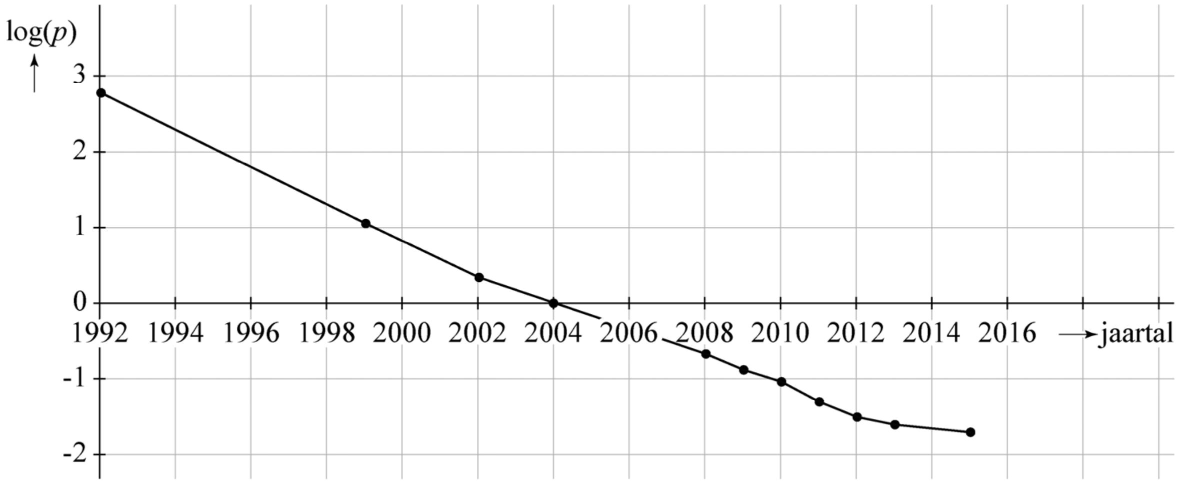
3p **1** Bereken dit aantal in miljarden. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Op 1 januari 1992 was de prijs per miljoen transistors 222 dollar. Vanaf dat moment nam de prijs per miljoen transistors af met 32% per jaar.
Er komt een moment dat de prijs per miljoen transistors voor het eerst minder is dan 0,1 dollarcent, dus minder dan 0,001 dollar.

4p **2** Bereken in welk jaar dat het geval is.

Als je een computerbestand opslaat, dan komt zo'n bestand bijvoorbeeld op een harde schijf (harddisk) terecht. De **opslagcapaciteit** van een harde schijf is het aantal GB (gigabyte) dat op die schijf kan worden opgeslagen.
Op basis van de opslagcapaciteit van een harde schijf en de prijs van de schijf kun je berekenen wat de prijs per GB is.
Deze prijs per GB is in de afgelopen jaren enorm gedaald. In de figuur is deze prijsdaling te zien. Op de verticale as is $\log(p)$ uitgezet. Hierin is p de prijs per GB in dollars.

figuur



In het jaar 2004 was het heel gebruikelijk om te werken met een harde schijf van 250 GB. In 2013 waren harde schijven van 2 TB (terabyte) gebruikelijk. Er geldt: 1 TB = 1000 GB.

Met deze gegevens kun je berekenen hoeveel procent goedkoper een harde schijf van 2 TB uit 2013 was dan een harde schijf van 250 GB uit 2004.

4p **3** Bereken dit percentage. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Hetzelfde snijpunt met de y-as

De functies f en g worden gegeven door:

$$f(x) = x^3 - x^2 - 7x - 29$$
$$g(x) = \left(x^2 + x - 2\right)\left(x - 3\right)$$

De grafieken van f en g snijden elkaar in twee punten. Dit zijn de punten A en B.
De lijn door A en B snijdt de y-as in het punt S.

Het snijpunt van de grafiek van g met de y-as is het punt T.

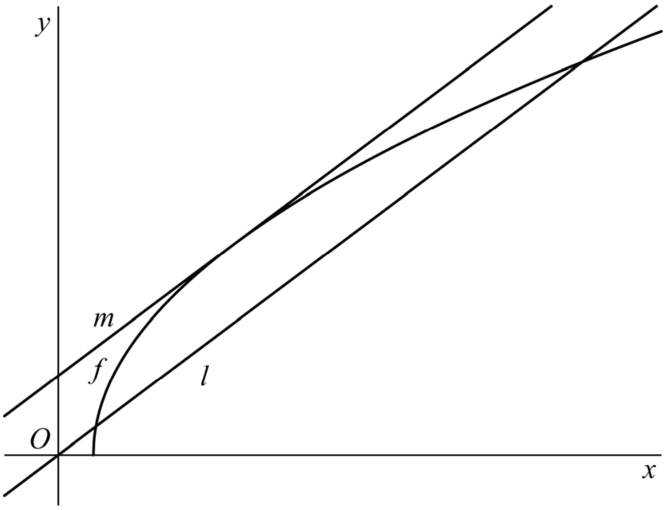
7p **4** Bewijs dat S en T dezelfde y-coördinaat hebben.

Twee transformaties

De functie f wordt gegeven door $f(x) = 2\sqrt{3x-4}$.
De lijn l heeft vergelijking $y = \frac{3}{4}x$.

Lijn l wordt c eenheden omhoog geschoven. Hierdoor ontstaat de lijn m die een raaklijn is aan de grafiek van f. Zie figuur 1.

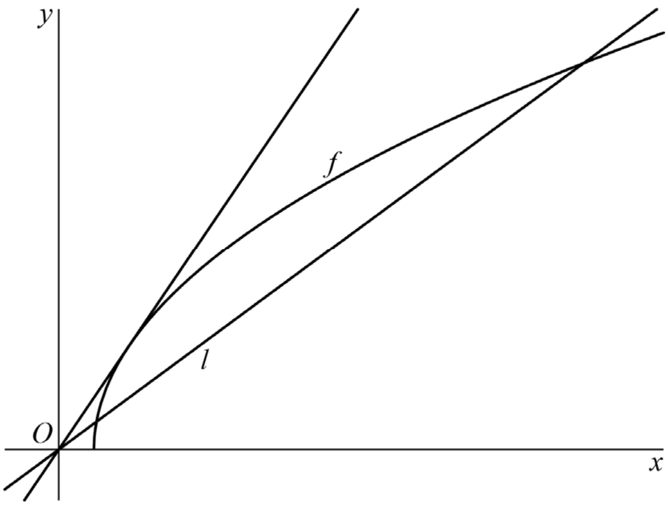
figuur 1



8p **5** Bereken exact met behulp van differentiëren de waarde van c.

Lijn l heeft twee punten gemeenschappelijk met de grafiek van f.
Door lijn l te vermenigvuldigen ten opzichte van de x-as met factor p ontstaat een nieuwe lijn. Er is één waarde van p met $p > 0$ waarvoor die nieuwe lijn precies één punt gemeenschappelijk heeft met de grafiek van f. Deze situatie is weergegeven in figuur 2.

figuur 2

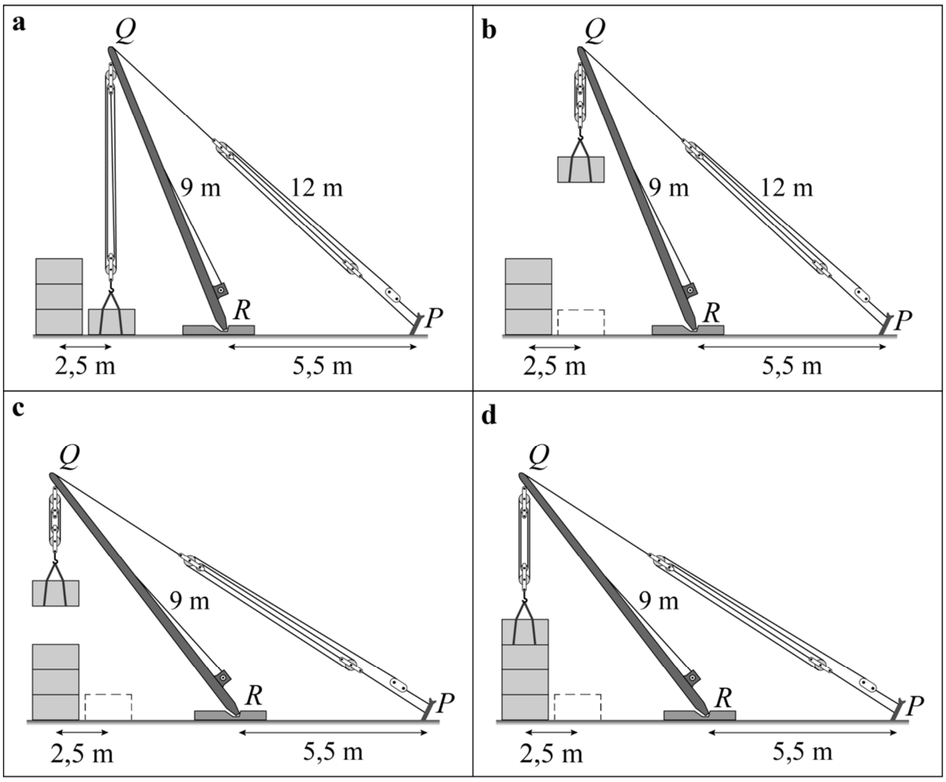


6p **6** Bereken exact deze waarde van p.

Bouwkraan

In de zesde eeuw voor Christus vonden de Grieken de bouwkraan uit, waarmee je zware voorwerpen kunt optakelen.
In de figuren 1a tot en met 1d zie je dat een blok wordt opgetakeld en 2,5 meter verderop op een stapel blokken wordt neergelaten.

figuur 1



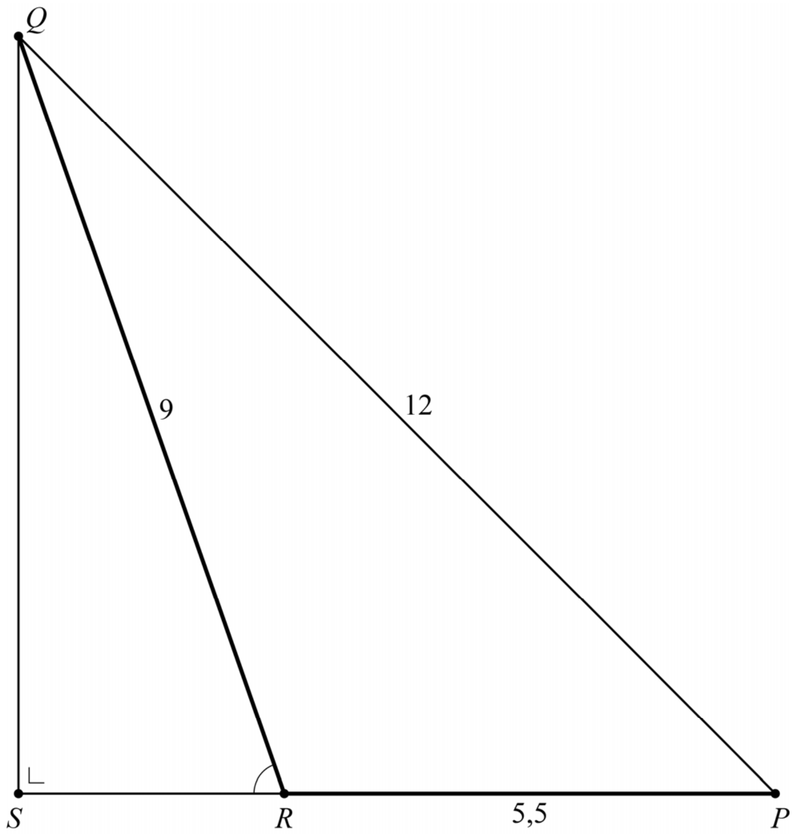
De kraan bestaat uit:
- een paal RQ van 9 meter, die kan scharnieren om R;
- een kabel PQ met een lengte die aangepast kan worden;
- een kabel recht omlaag vanuit Q met een lengte die aangepast kan worden.

Verder geldt:
- de afstand tussen P en R is 5,5 meter;
- het te verplaatsen blok hangt aan de kabel ergens onder Q.

De verplaatsing gaat als volgt:
- Het blok in figuur 1a takelt men omhoog door de kabel onder Q korter te maken. Hierdoor ontstaat de situatie van figuur 1b.
- Vervolgens maakt men kabel PQ langer, waardoor paal RQ linksom scharniert en het blok naar links beweegt. Zo ontstaat de situatie van figuur 1c.
- Ten slotte laat men het blok recht omlaag zakken door de kabel onder Q weer langer te maken. Zo ontstaat de situatie van figuur 1d.

In figuur 2 zie je de situatie van de figuren 1a en 1b schematisch weergegeven. Het punt op de grond recht onder punt Q, noemen we S. Ergens op lijnstuk QS bevindt zich het midden van het blok.

figuur 2 beginsituatie



Als de bouwkraan zich in de situatie van de figuren 1a en 1b bevindt, is de lengte van PQ gelijk aan 12 meter. $\angle SRQ$ is dan afgerond 71 graden. Deze hoek kan nauwkeuriger berekend worden.

4p **7** Bereken algebraïsch $\angle SRQ$ in graden. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Zoals in figuur 1 is te zien, moet het blok 2,5 meter naar links worden verplaatst. Kabel PQ moet dus zo veel langer worden dat de afstand tussen R en S met 2,5 meter toeneemt.
Figuur 2, de beginsituatie, staat ook op de uitwerkbijlage.

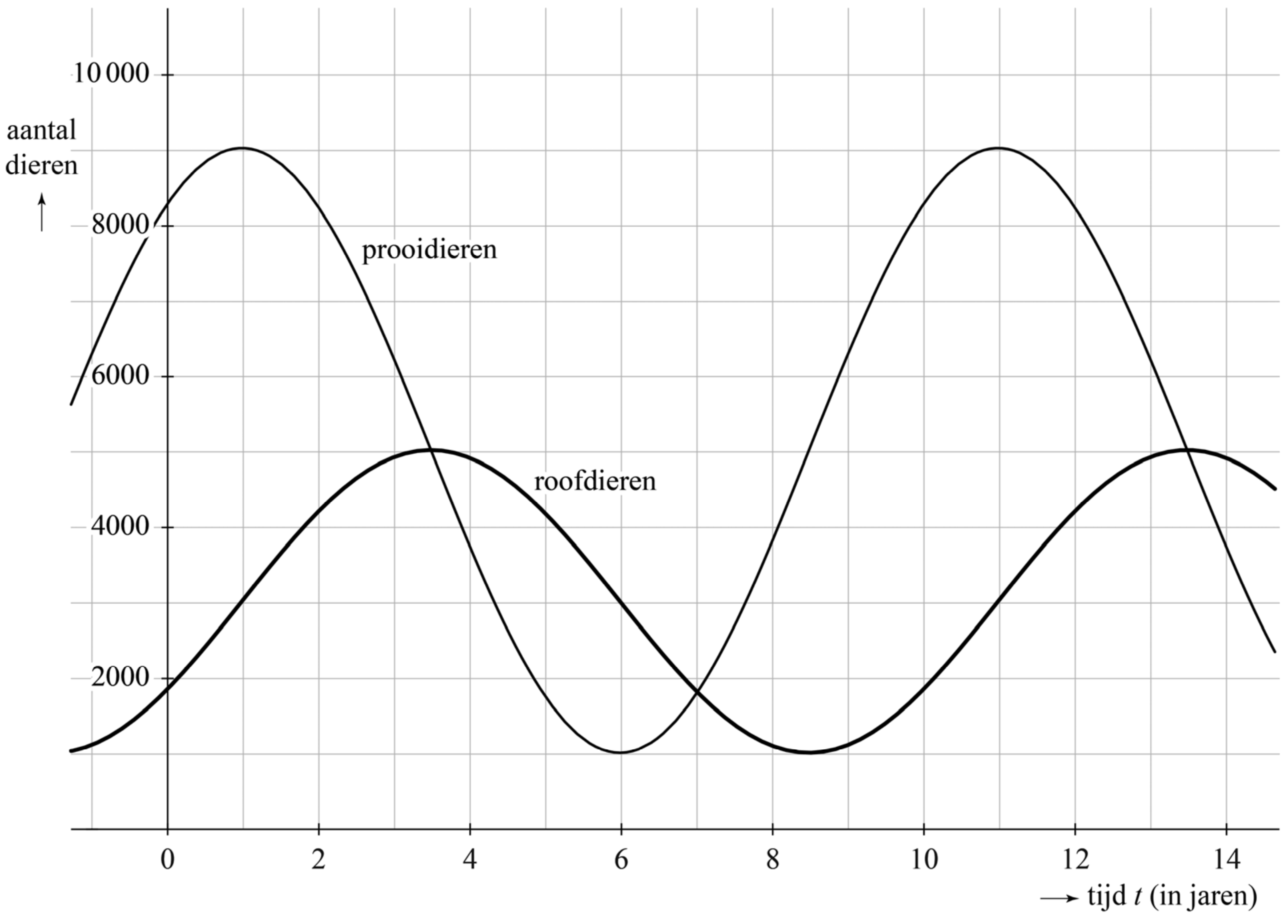
4p **8** Bereken algebraïsch de lengte van kabel PQ in de situatie van de figuren 1c en 1d. Geef je eindantwoord in meters in één decimaal. Je kunt hierbij de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken.

Prooidieren en roofdieren

Er bestaan wiskundige modellen die het verband aangeven tussen aantallen prooidieren en roofdieren. Deze modellen worden **prooi-roofdiermodellen** genoemd.

Als er in een gebied veel prooidieren zijn, dan zal na verloop van tijd het aantal roofdieren in dat gebied sterk toenemen, omdat die zich voldoende kunnen voeden met de prooidieren. Door die toename van het aantal roofdieren zal het aantal prooidieren teruglopen. Hierdoor kunnen de roofdieren minder voedsel vinden en zullen zij in aantal afnemen. Als gevolg daarvan zal het aantal prooidieren weer toenemen. En daarmee begint deze cyclus weer opnieuw. In figuur 1 wordt een model van zo'n cyclus weergegeven.

figuur 1



De grafieken van het aantal roofdieren en het aantal prooidieren zijn in dit model sinusoïden.

4p **9** Stel op algebraïsche wijze een functievoorschrift voor r op waarmee je het aantal roofdieren r in figuur 1 kunt berekenen als functie van de tijd t in jaren.

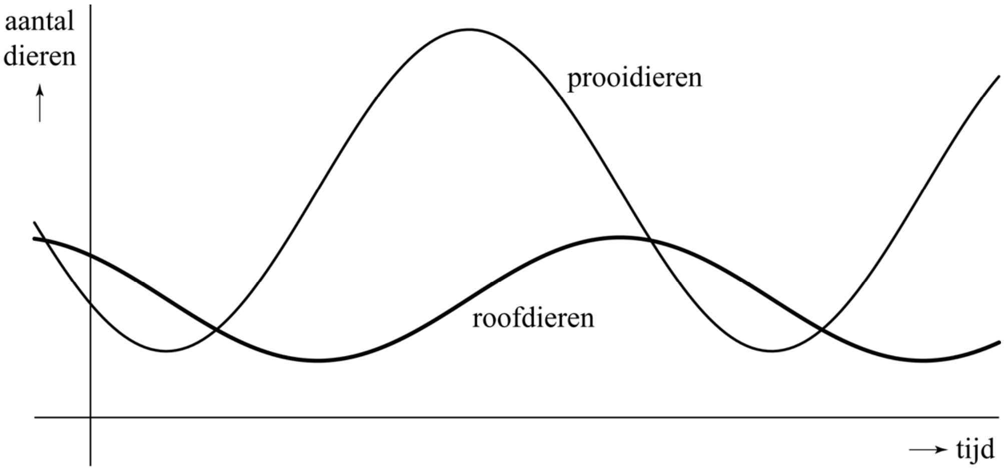
In de rest van deze opgave gaan we uit van een ander prooi-roofdiermodel:

$$p(t) = 4800 + 3400 \cdot \sin\left(\tfrac{1}{4}\pi(t-3)\right)$$

$$r(t) = 2500 + 1300 \cdot \cos\left(\tfrac{1}{4}\pi(t+1)\right)$$

Hierin is p het aantal prooidieren, r het aantal roofdieren en t de tijd in jaren. In figuur 2 zijn de grafieken van p en r geschetst.

figuur 2



In elke periode is er één moment waarop de groeisnelheid van het aantal prooidieren maximaal is. In het bijbehorende punt op de grafiek is de helling dus maximaal.

3p **10** Bereken deze maximale groeisnelheid. Geef je eindantwoord in gehele honderdtallen prooidieren per jaar.

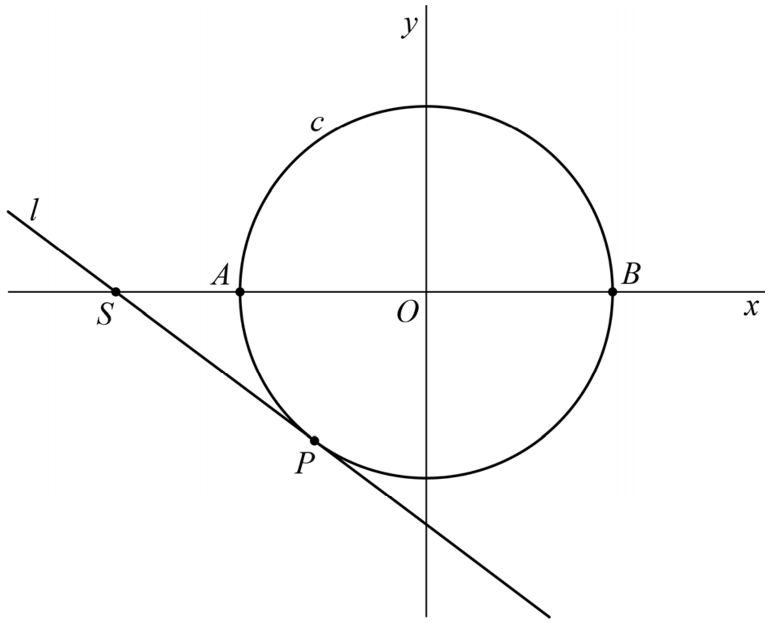
Iemand zegt: “Op de momenten dat er 4300 prooidieren zijn, zijn er … roofdieren of … roofdieren.”

4p **11** Bereken welke twee getallen op de plaats van de puntjes moeten staan, zodat de uitspraak juist is. Geef deze getallen in gehele honderdtallen.

Raaklijn aan cirkel

De cirkel c heeft vergelijking $x^2 + y^2 = 25$. Het middelpunt van c is O.
Het punt $P(-3, -4)$ ligt op c. De lijn l is de raaklijn aan de cirkel in P.
Lijn l snijdt de x-as in het punt S. Cirkel c snijdt de x-as in de punten A en B. Zie figuur 1.

figuur 1



Een vergelijking van l is $y = -\frac{3}{4}x - 6\frac{1}{4}$.

3p **12** Bewijs dat $y = -\frac{3}{4}x - 6\frac{1}{4}$ inderdaad een vergelijking van l is.

Er geldt $AS \cdot BS = PS^2$.

5p **13** Bewijs dat voor de situatie van figuur 1 inderdaad geldt $AS \cdot BS = PS^2$.

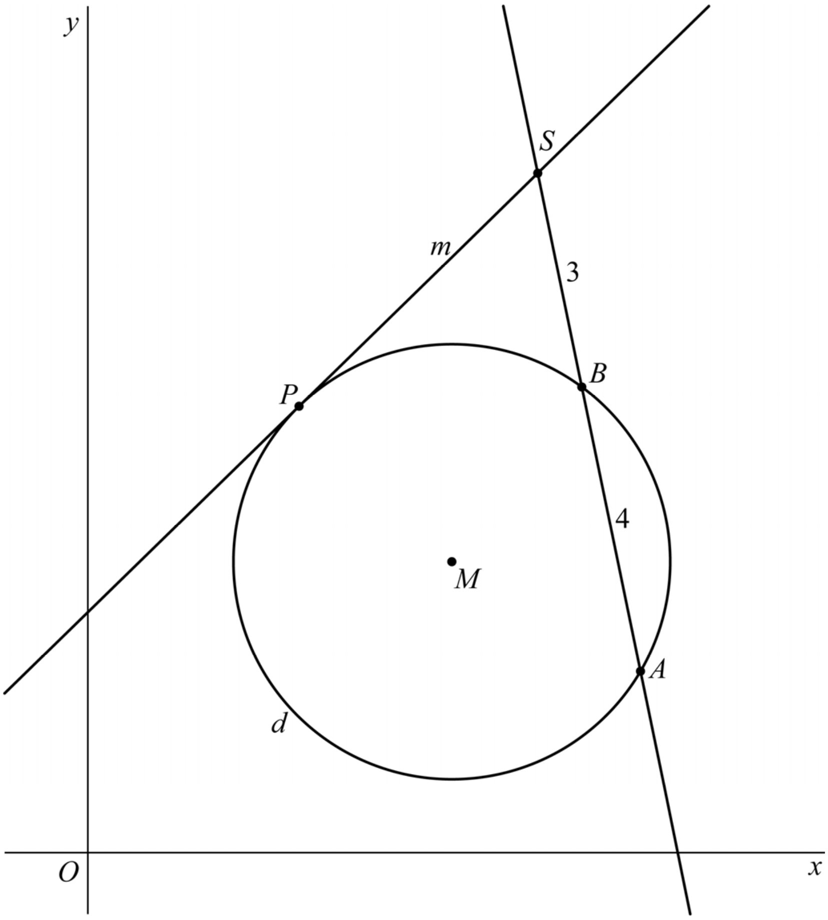
De gelijkheid $AS \cdot BS = PS^2$ geldt algemener, namelijk voor elke situatie waarin geldt:

– A, B en P zijn drie willekeurige punten op een cirkel;
– het punt S is het snijpunt van de lijn door A en B met de raaklijn aan de cirkel in P.

In figuur 2 is de cirkel d met middelpunt $M(5, 4)$ en straal 3 weergegeven.
De punten A, B en P zijn drie punten op de cirkel.

De lijn m is de raaklijn aan de cirkel in P. Het punt S is het snijpunt van lijn m en de lijn door A en B. Verder is gegeven dat $AB = 4$ en $BS = 3$.
Figuur 2 staat ook op de uitwerkbijlage.

figuur 2



4p **14** Bereken exact de afstand tussen punt S en cirkel d. Je kunt hierbij de figuur op de uitwerkbijlage gebruiken.

Logaritmen en snijpunten

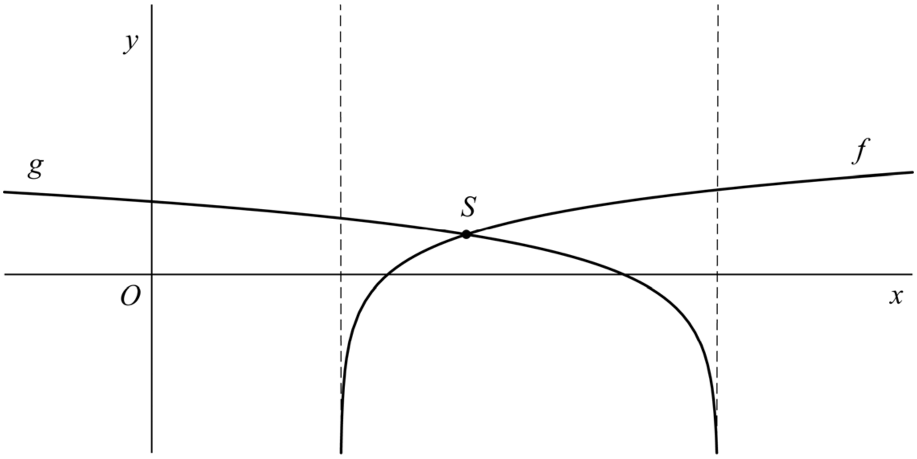
De functies f en g worden gegeven door

$$f(x) = \log(2x-4)$$

$$g(x) = \log(6-x)$$

Beide grafieken hebben een verticale asymptoot. Het punt S is het snijpunt van de grafieken van f en g. Zie figuur 1.

figuur 1

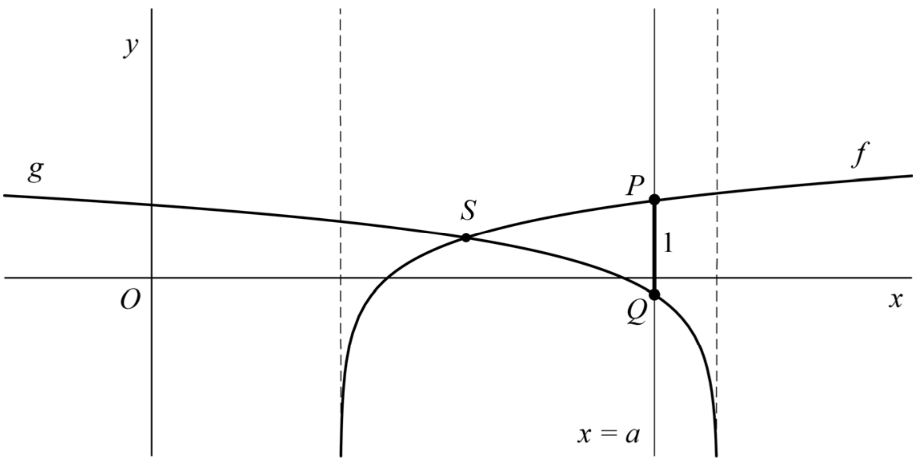


De afstand van S tot de asymptoot van de grafiek van g is groter dan de afstand van S tot de asymptoot van de grafiek van f.

5p **15** Bereken exact hoeveel keer zo groot.

De lijn met vergelijking $x = a$ ligt rechts van S en snijdt de grafieken van f en g in de punten P en Q. De waarde van a is zo gekozen dat de lengte van lijnstuk PQ gelijk is aan 1. Zie figuur 2.

figuur 2



5p **16** Bereken exact de waarde van a.

Maximale richtingscoëfficiënt

Op het domein $\langle 0, \rightarrow \rangle$ wordt de functie f gegeven door:

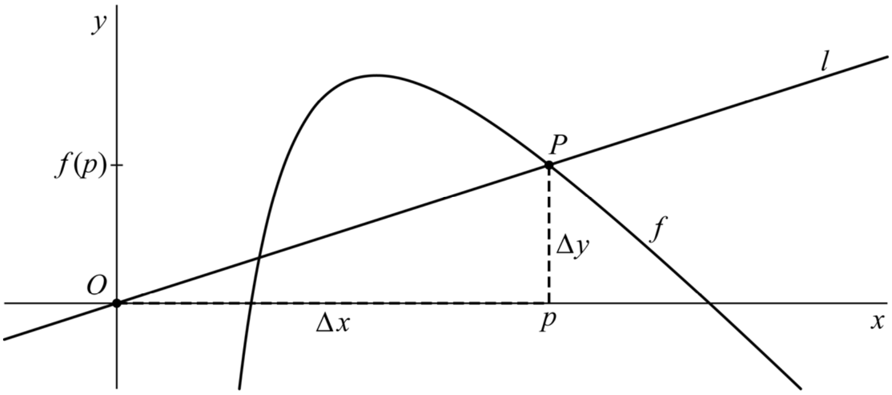
$$f(x) = 3 - \frac{1}{x^2} - x$$

Het punt P ligt op de grafiek van f. De x-coördinaat van P is p.
De y-coördinaat van P is dus $f(p)$.
De lijn l gaat door de oorsprong O en door P. De richtingscoëfficiënt van l noemen we a. Er geldt:

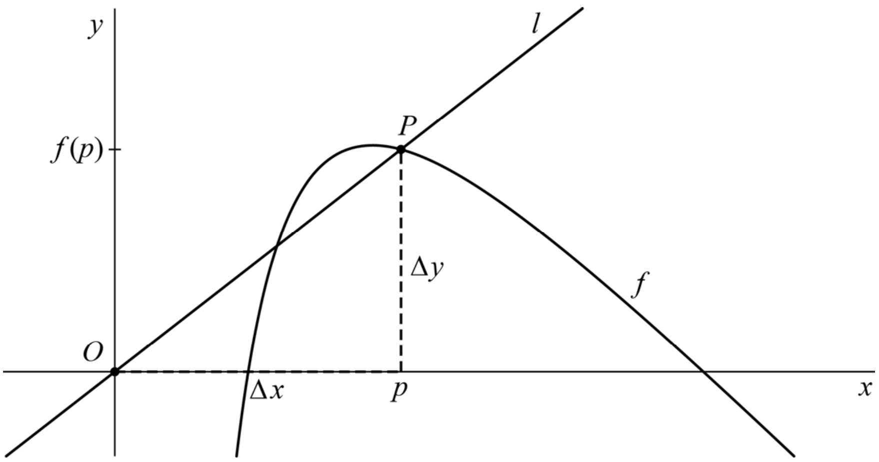
$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(p)}{p}$$

In de figuren 1 en 2 is lijn l voor twee posities van P getekend. In figuur 2 is a groter dan in figuur 1.

figuur 1



figuur 2



Er is een waarde van p waarvoor a maximaal is. Deze waarde van p kun je berekenen door eerst a uit te drukken in p.

5p **17** Bereken exact de waarde van p waarvoor a maximaal is.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift, dat na afloop van het examen wordt gepubliceerd.