# Correctievoorschrift VWO
# 2018

tijdvak 2

## wiskunde B

Het correctievoorschrift bestaat uit:
1 Regels voor de beoordeling
2 Algemene regels
3 Vakspecifieke regels
4 Beoordelingsmodel
5 Aanleveren scores

## 1 Regels voor de beoordeling

Het werk van de kandidaten wordt beoordeeld met inachtneming van de artikelen 41 en 42 van het Eindexamenbesluit VO.
Voorts heeft het College voor Toetsen en Examens op grond van artikel 2 lid 2d van de Wet College voor toetsen en examens de Regeling beoordelingsnormen en bijbehorende scores centraal examen vastgesteld.
Voor de beoordeling zijn de volgende aspecten van de artikelen 36, 41, 41a en 42 van het Eindexamenbesluit VO van belang:
1 De directeur doet het gemaakte werk met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen en het proces-verbaal van het examen toekomen aan de examinator. Deze kijkt het werk na en zendt het met zijn beoordeling aan de directeur. De examinator past de beoordelingsnormen en de regels voor het toekennen van scorepunten toe die zijn gegeven door het College voor Toetsen en Examens.
2 De directeur doet de van de examinator ontvangen stukken met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen, het proces-verbaal en de regels voor het bepalen van de score onverwijld aan de directeur van de school van de gecommitteerde toekomen. Deze stelt het ter hand aan de gecommitteerde.

3 De gecommitteerde beoordeelt het werk zo spoedig mogelijk en past de beoordelingsnormen en de regels voor het bepalen van de score toe die zijn gegeven door het College voor Toetsen en Examens.
De gecommitteerde voegt bij het gecorrigeerde werk een verklaring betreffende de verrichte correctie. Deze verklaring wordt mede ondertekend door het bevoegd gezag van de gecommitteerde.
4 De examinator en de gecommitteerde stellen in onderling overleg het behaalde aantal scorepunten voor het centraal examen vast.
5 Indien de examinator en de gecommitteerde daarbij niet tot overeenstemming komen, wordt het geschil voorgelegd aan het bevoegd gezag van de gecommitteerde. Dit bevoegd gezag kan hierover in overleg treden met het bevoegd gezag van de examinator. Indien het geschil niet kan worden beslecht, wordt hiervan melding gemaakt aan de inspectie. De inspectie kan een derde onafhankelijke corrector aanwijzen. De beoordeling van deze derde corrector komt in de plaats van de eerdere beoordelingen.

## 2 Algemene regels

Voor de beoordeling van het examenwerk zijn de volgende bepalingen uit de regeling van het College voor Toetsen en Examens van toepassing:

1 De examinator vermeldt op een lijst de namen en/of nummers van de kandidaten, het aan iedere kandidaat voor iedere vraag toegekende aantal scorepunten en het totaal aantal scorepunten van iedere kandidaat.
2 Voor het antwoord op een vraag worden door de examinator en door de gecommitteerde scorepunten toegekend, in overeenstemming met correctievoorschrift. Scorepunten zijn de getallen 0, 1, 2, ..., n, waarbij n het maximaal te behalen aantal scorepunten voor een vraag is. Andere scorepunten die geen gehele getallen zijn, of een score minder dan 0 zijn niet geoorloofd.
3 Scorepunten worden toegekend met inachtneming van de volgende regels:
3.1 indien een vraag volledig juist is beantwoord, wordt het maximaal te behalen aantal scorepunten toegekend;
3.2 indien een vraag gedeeltelijk juist is beantwoord, wordt een deel van de te behalen scorepunten toegekend in overeenstemming met het beoordelingsmodel;
3.3 indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel;
3.4 indien slechts één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, wordt uitsluitend het eerstgegeven antwoord beoordeeld;
3.5 indien meer dan één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, worden uitsluitend de eerstgegeven antwoorden beoordeeld, tot maximaal het gevraagde aantal;
3.6 indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven;

3.7 indien in het beoordelingsmodel verschillende mogelijkheden zijn opgenomen, gescheiden door het teken /, gelden deze mogelijkheden als verschillende formuleringen van hetzelfde antwoord of onderdeel van dat antwoord;

3.8 indien in het beoordelingsmodel een gedeelte van het antwoord tussen haakjes staat, behoeft dit gedeelte niet in het antwoord van de kandidaat voor te komen;

3.9 indien een kandidaat op grond van een algemeen geldende woordbetekenis, zoals bijvoorbeeld vermeld in een woordenboek, een antwoord geeft dat vakinhoudelijk onjuist is, worden aan dat antwoord geen scorepunten toegekend, of tenminste niet de scorepunten die met de vakinhoudelijke onjuistheid gemoeid zijn.

4 Het juiste antwoord op een meerkeuzevraag is de hoofdletter die behoort bij de juiste keuzemogelijkheid. Voor een juist antwoord op een meerkeuzevraag wordt het in het beoordelingsmodel vermelde aantal scorepunten toegekend. Voor elk ander antwoord worden geen scorepunten toegekend. Indien meer dan één antwoord gegeven is, worden eveneens geen scorepunten toegekend.

5 Een fout mag in de uitwerking van een vraag maar één keer worden aangerekend, tenzij daardoor de vraag aanzienlijk vereenvoudigd wordt en/of tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

6 Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

7 Indien de examinator of de gecommitteerde meent dat in een examen of in het beoordelingsmodel bij dat examen een fout of onvolkomenheid zit, beoordeelt hij het werk van de kandidaten alsof examen en beoordelingsmodel juist zijn. Hij kan de fout of onvolkomenheid mededelen aan het College voor Toetsen en Examens. Het is niet toegestaan zelfstandig af te wijken van het beoordelingsmodel. Met een eventuele fout wordt bij de definitieve normering van het examen rekening gehouden.

8 Scorepunten worden toegekend op grond van het door de kandidaat gegeven antwoord op iedere vraag. Er worden geen scorepunten vooraf gegeven.

9 Het cijfer voor het centraal examen wordt als volgt verkregen.
Eerste en tweede corrector stellen de score voor iedere kandidaat vast. Deze score wordt meegedeeld aan de directeur.
De directeur stelt het cijfer voor het centraal examen vast op basis van de regels voor omzetting van score naar cijfer.

NB1 *T.a.v. de status van het correctievoorschrift:*
Het College voor Toetsen en Examens heeft de correctievoorschriften bij regeling vastgesteld. Het correctievoorschrift is een zogeheten algemeen verbindend voorschrift en valt onder wet- en regelgeving die van overheidswege wordt verstrekt. De corrector mag dus niet afwijken van het correctievoorschrift.

NB2 *T.a.v. het verkeer tussen examinator en gecommitteerde (eerste en tweede corrector):*
Het aangeven van de onvolkomenheden op het werk en/of het noteren van de behaalde scores bij de vraag is toegestaan, maar niet verplicht. Evenmin is er een standaardformulier voorgeschreven voor de vermelding van de scores van de kandidaten. Het vermelden van het schoolexamencijfer is toegestaan, maar niet verplicht. Binnen de ruimte die de regelgeving biedt, kunnen scholen afzonderlijk of in gezamenlijk overleg keuzes maken.

NB3 *T.a.v. aanvullingen op het correctievoorschrift:*
Er zijn twee redenen voor een aanvulling op het correctievoorschrift: verduidelijking en een fout.
*Verduidelijking*
Het correctievoorschrift is vóór de afname opgesteld. Na de afname blijkt pas welke antwoorden kandidaten geven. Vragen en reacties die via het Examenloket bij de Toets- en Examenlijn binnenkomen, kunnen duidelijk maken dat het correctievoorschrift niet voldoende recht doet aan door kandidaten gegeven antwoorden. Een aanvulling op het correctievoorschrift kan dan alsnog duidelijkheid bieden.
*Een fout*
Als het College voor Toetsen en Examens vaststelt dat een centraal examen een fout bevat, kan het besluiten tot een aanvulling op het correctievoorschrift.

Een aanvulling op het correctievoorschrift wordt door middel van een mailing vanuit Examenblad.nl bekendgemaakt. Een aanvulling op het correctievoorschrift wordt zo spoedig mogelijk verstuurd aan de examensecretarissen.
Soms komt een onvolkomenheid pas geruime tijd na de afname aan het licht. In die gevallen vermeldt de aanvulling:

- Als het werk al naar de tweede corrector is gezonden, past de tweede corrector deze aanvulling op het correctievoorschrift toe.
  en/of
- Als de aanvulling niet is verwerkt in de naar Cito gezonden Wolf-scores, voert Cito dezelfde wijziging door die de correctoren op de verzamelstaat doorvoeren.

Dit laatste gebeurt alleen als de aanvulling luidt dat voor een vraag alle scorepunten moeten worden toegekend.

Als een onvolkomenheid op een dusdanig laat tijdstip geconstateerd wordt dat een aanvulling op het correctievoorschrift ook voor de tweede corrector te laat komt, houdt het College voor Toetsen en Examens bij de vaststelling van de N-term rekening met de onvolkomenheid.

## 3 Vakspecifieke regels

Voor dit examen zijn de volgende vakspecifieke regels vastgesteld:

1 Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt 1 scorepunt in mindering gebracht tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.

2 De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de grafische rekenmachine gebruiken. Bij de betreffende vragen geven de kandidaten een toelichting waaruit blijkt hoe zij de GR hebben gebruikt.

3a Als bij een vraag doorgerekend wordt met tussenantwoorden die afgerond zijn, en dit leidt tot een ander eindantwoord dan wanneer doorgerekend is met niet-afgeronde tussenantwoorden, wordt bij de betreffende vraag één scorepunt in mindering gebracht. Tussenantwoorden mogen wel afgerond genoteerd worden.

3b Uitzondering zijn die gevallen waarin door de context wordt bepaald dat tussenantwoorden moeten worden afgerond.

## 4 Beoordelingsmodel

| Vraag | Antwoord | Scores |
|---|---|---|

## Loodrecht in de perforatie

**1 maximumscore 3**

- $f(x) = \dfrac{-2+2\sqrt{x+1}}{x} = \dfrac{-2+2\sqrt{x+1}}{x} \cdot \dfrac{2+2\sqrt{x+1}}{2+2\sqrt{x+1}}$ — 1
- Dus $f(x) = \dfrac{-4+4(x+1)}{x(2+2\sqrt{x+1})}$ — 1
- Dit geeft $\dfrac{4x}{2x(1+\sqrt{x+1})} = \dfrac{2}{1+\sqrt{x+1}}$ $(= h(x))$ (voor $x \neq 0$) — 1

of

- $h(x) = \dfrac{2}{1+\sqrt{x+1}} \cdot \dfrac{1-\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}$ (voor $x \neq 0$) — 1
- Dus $h(x) = \dfrac{2(1-\sqrt{x+1})}{1-x-1}$ (voor $x \neq 0$) — 1
- Dit geeft $\dfrac{2-2\sqrt{x+1}}{-x} = \dfrac{-2+2\sqrt{x+1}}{x}$ $(= f(x))$ (voor $x \neq 0$) — 1

of

- Als moet gelden $f(x) = h(x)$ (voor $x \neq 0$), dan moet gelden $(-2+2\sqrt{x+1}) \cdot (1+\sqrt{x+1}) = 2x$ (voor $x \neq 0$) — 1
- $(-2+2\sqrt{x+1}) \cdot (1+\sqrt{x+1}) = 2(-1+\sqrt{x+1}) \cdot (1+\sqrt{x+1})$ — 1
- $2(-1+\sqrt{x+1}) \cdot (1+\sqrt{x+1}) = 2(-1+x+1) = 2x$ (dus $f(x) = h(x)$) (voor $x \neq 0$) — 1

of

- Als moet gelden $f(x) = h(x)$ (voor $x \neq 0$), dan moet gelden $(-2+2\sqrt{x+1}) \cdot (1+\sqrt{x+1}) = 2x$ (voor $x \neq 0$) — 1
- $(-2+2\sqrt{x+1}) \cdot (1+\sqrt{x+1}) = -2-2\sqrt{x+1}+2\sqrt{x+1}+2(x+1)$ — 1
- Dit is gelijk aan $2x$ (dus $f(x) = h(x)$) (voor $x \neq 0$) — 1

**2 maximumscore 5**

- $h'(x) = \dfrac{-2}{(1+\sqrt{x+1})^2} \cdot \dfrac{1}{2\sqrt{x+1}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) 2
- $h'(0) = -\frac{1}{4}$ 1
- $\dfrac{4x^2+x}{x} = 4x+1$ (voor $x \neq 0$), dus een vergelijking van $k$ is $y = 4x+1$ 1
- $4 \cdot -\frac{1}{4} = -1$ (dus de grafieken van $h$ en $k$ staan in $P$ loodrecht op elkaar en dus staan de grafieken van $f$ en $g$ in $P$ loodrecht op elkaar) 1

*Opmerking*
*Als de kettingregel niet of onjuist is toegepast, voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.*

# IJsbol

**3** **maximumscore 4**

- Voor het bolvormige ijsklontje met straal $r$ moet gelden $\frac{4}{3}\pi r^3 = 27$ 1
- Dit geeft $r = \sqrt[3]{\frac{81}{4\pi}}$ $(= 1{,}86...)$ (cm) 1
- De oppervlakte van het bolvormige ijsklontje is $4\pi \cdot \left(\frac{81}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$ (of $4\pi \cdot 1{,}86...^2$) (cm$^2$) 1
- Het gevraagde quotiënt is 1,61 1

of

- Voor het bolvormige ijsklontje met straal $r$ moet gelden $\frac{4}{3}\pi r^3 = 27$ 1
- Dit geeft $r = \sqrt[3]{\frac{81}{4\pi}}$ $(= 1{,}86...)$ (cm) 1
- $\frac{A}{V} = \frac{4\pi r^2}{\frac{4}{3}\pi r^3} = \frac{3}{r}$ 1
- (De gevonden waarde van $r$ invullen geeft) 1,61 1

**4** **maximumscore 5**

- Het volume van het deel van de ijsbol onder het wateroppervlak is $\pi \int_{-1{,}5}^{a} \left(2{,}25 - y^2\right) \mathrm{d}y$ 1
- Er moet gelden $\pi \int_{-1{,}5}^{a} \left(2{,}25 - y^2\right) \mathrm{d}y = 0{,}92 \cdot 14{,}137$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking (met de GR) kan worden opgelost 2
- $a \approx 0{,}98$ dus het gevraagde antwoord is 0,52 (cm) 1

of

- Het volume van het deel van de ijsbol boven het wateroppervlak is $\pi \int_{1{,}5-h}^{1{,}5} \left(2{,}25 - y^2\right) \mathrm{d}y$ 1
- Er moet gelden $\pi \int_{1{,}5-h}^{1{,}5} \left(2{,}25 - y^2\right) \mathrm{d}y = 0{,}08 \cdot 14{,}137$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking (met de GR) kan worden opgelost 2
- $h \approx 0{,}52$ (dus het gevraagde antwoord is 0,52 (cm)) 1

**5** **maximumscore 5**

- $r(t) = a \cdot t + 1{,}5$ (voor een constante waarde $a$) 1
- $V(10) = 7{,}068...$ $(= 2{,}25\pi)$ ($\text{cm}^3$) 1
- Hieruit volgt $r(10) = \sqrt[3]{1{,}6875}$ $(= 1{,}190...)$ (cm) 1
- $r(10) = 10a + 1{,}5 = 1{,}190...$ (of: $a = \dfrac{r(10) - r(0)}{10}$) geeft $a = -0{,}0309...$ 1
- $-0{,}0309... \cdot t + 1{,}5 = 0$ geeft $t = 48{,}47...$, dus het gevraagde antwoord is 49 (minuten) 1

of

- $r(t) = a \cdot t + 1{,}5$ (voor een constante waarde $a$) 1
- $V(10) = 7{,}068...$ $(= 2{,}25\pi)$ ($\text{cm}^3$) 1
- De vergelijking $\frac{4}{3}\pi(10a + 1{,}5)^3 = 7{,}068...$ moet worden opgelost 1
- De oplossing van deze vergelijking is $a = -0{,}0309...$ 1
- $-0{,}0309... \cdot t + 1{,}5 = 0$ geeft $t = 48{,}47...$, dus het gevraagde antwoord is 49 (minuten) 1

of

- (Na 10 minuten geldt:) $\frac{4}{3}\pi \cdot r^3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{3}\pi \cdot 1{,}5^3$ 1
- Beschrijven hoe hieruit de waarde van $r$ berekend kan worden 1
- $r = 1{,}190...$ (cm) 1
- $r$ neemt in 10 minuten af met 0,309… (cm), dus 0,0309… cm per minuut 1
- $\dfrac{1{,}5}{0{,}0309...} = 48{,}47...$, dus het gevraagde antwoord is 49 (minuten) 1

## Constante verhouding

**6 maximumscore 4**

- $f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x) = x - x\ln(ax) + x - x\ln(\frac{1}{a}x) = 2x - x(\ln(ax) + \ln(\frac{1}{a}x))$ 1
- $\ln(ax) + \ln(\frac{1}{a}x) = \ln(x^2) = 2\ln(x)$ 2
- Dus $\dfrac{f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x)}{2} = \dfrac{2x - x \cdot 2\ln(x)}{2} = x - x\ln(x)$ $(= f_1(x))$ 1

of

- $f_a(x) = x - x\ln(ax) = x - x\ln(a) - x\ln(x)$ 1
- $f_{\frac{1}{a}}(x) = x - x\ln(\frac{1}{a}x) = x + x\ln(a) - x\ln(x)$ 2
- Dus $\dfrac{f_a(x) + f_{\frac{1}{a}}(x)}{2} = \dfrac{2x - 2x\ln(x)}{2} = x - x\ln(x)$ $(= f_1(x))$ 1

**7 maximumscore 7**

- $x - x\ln(ax) = 0$ geeft $\ln(ax) = 1$ 1
- Dit geeft $ax = \mathrm{e}$ dus $x_S = \frac{\mathrm{e}}{a}$ 1
- $f_a'(x) = 1 - (\ln(ax) + x \cdot \dfrac{a}{ax})$ 2
- $f_a'(x) = 1 - \ln(ax) - 1 = -\ln(ax) = 0$ 1
- Dit geeft $ax = 1$, dus $x_T = \frac{1}{a}$ 1
- Dit geeft: $\dfrac{x_S}{x_T} = \dfrac{\frac{\mathrm{e}}{a}}{\frac{1}{a}} = \mathrm{e}$ (en dus is de verhouding $\dfrac{x_S}{x_T}$ constant) 1

*Opmerking*
*Als de product- en/of kettingregel niet of onjuist is toegepast, voor deze vraag maximaal 5 scorepunten toekennen.*

## Gekanteld vierkant

**8 maximumscore 5**

- Omdat $\angle PBC = 90^\circ$ is $PC$ een middellijn van de cirkel (Thales) — 2
- Het middelpunt $M$ is het midden van lijnstuk $PC$ dus $M(-1, -\frac{1}{2})$ — 1
- De straal is $\frac{1}{2}CP = \frac{1}{2}\sqrt{6^2 + 7^2} = \frac{1}{2}\sqrt{85}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) $(= 4{,}609...)$ — 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x+1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

of

- Omdat $\angle PBC = 90^\circ$ is $PC$ een middellijn van de cirkel (Thales) — 2
- Het middelpunt $M$ is het midden van lijnstuk $PC$ dus $M(-1, -\frac{1}{2})$ — 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x+1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = r^2$ — 1
- Invullen van de coördinaten van $P$, $B$ of $C$ geeft $r^2 = 21\frac{1}{4}$, dus een vergelijking van de cirkel is $(x+1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

of

- De middelloodlijn van lijnstuk $BC$ heeft vergelijking $y = -\frac{1}{2}x - 1$ (of vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$) — 1
- De middelloodlijn van lijnstuk $PB$ heeft vergelijking $y = 2x + 1\frac{1}{2}$ (of vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3\frac{1}{2} \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$) — 1
- Berekenen van het snijpunt van de middelloodlijnen geeft middelpunt $M(-1, -\frac{1}{2})$ — 1
- De straal is $CM\ (= BM = PM) = \sqrt{21\frac{1}{4}}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) $(= 4{,}609...)$ — 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x+1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

of

- Een vergelijking van de cirkel (met middelpunt $(a, b)$ en straal $r$) is $(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ — 1
- Invullen van de coördinaten van de punten $B$, $C$ en $P$ geeft $a^2+(4-b)^2=r^2$, $(-4-a)^2+(-4-b)^2=r^2$ en $(2-a)^2+(3-b)^2=r^2$ — 1
- Beschrijven hoe dit stelsel van drie vergelijkingen met drie onbekenden opgelost kan worden — 1
- $a=-1$, $b=-\frac{1}{2}$ en $r=\sqrt{21{,}25}$ $(=4{,}609...)$ — 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x+1)^2+(y+\frac{1}{2})^2=21{,}25$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1

**9 maximumscore 5**

- De lijn door $P$ en $D$ heeft vergelijking $y=-5\frac{1}{2}x+14$ — 1
- De lijn door $C$ loodrecht op de lijn door $P$ en $D$ heeft vergelijking $y=\frac{2}{11}(x+4)-4$ (of een gelijkwaardige uitdrukking) — 1
- Snijden van de twee lijnen geeft de vergelijking $\frac{2}{11}(x+4)-4=-5\frac{1}{2}x+14$ — 1
- Dit geeft $x=3\frac{1}{25}$ — 1
- Het antwoord $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$ — 1

of

- De lijn door $P$ en $D$ heeft vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}+t\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$ — 1
- $\overrightarrow{CQ}=\begin{pmatrix} 6+2t \\ 7-11t \end{pmatrix}$ — 1
- $\overrightarrow{CQ}\perp\overrightarrow{PD}$ geeft $\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 6+2t \\ 7-11t \end{pmatrix}=0$ — 1
- Dit geeft $t=\frac{13}{25}$ — 1
- Het antwoord $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$ — 1

of

- Omdat $\angle PQC = 90^\circ$ is $PC$ een middellijn van de cirkel (Thales), dus ligt $Q$ op de cirkel door $P$, $B$ en $C$ met vergelijking $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ — 1
- De lijn door $P$ en $D$ heeft vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$ — 1
- $(2t+3)^2 + (-11t+3\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ geeft $125t^2 - 65t = 0$ — 1
- Dit geeft $t = \frac{13}{25}$ ($t = 0$ voldoet niet) — 1
- Het antwoord $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$ — 1

of

- Omdat $\angle PQC = 90^\circ$ is $PC$ een middellijn van de cirkel (Thales), dus ligt $Q$ op de cirkel door $P$, $B$ en $C$ met vergelijking $(x+1)^2 + (y+\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ — 1
- De lijn door $P$ en $D$ heeft vergelijking $y = -5\frac{1}{2}x + 14$ — 1
- $(x+1)^2 + (-5\frac{1}{2}x + 14\frac{1}{2})^2 = 21\frac{1}{4}$ geeft $31\frac{1}{4}x^2 - 157\frac{1}{2}x + 190 = 0$ — 1
- Dit geeft (bijvoorbeeld met de abc-formule) $x = 3\frac{1}{25}$ ($x = 2$ voldoet niet) — 1
- Het antwoord $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$ — 1

of

- De lijn door $P$ en $D$ heeft vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix}$ — 1
- Dus $Q$ heeft coördinaten $(2+2t, 3-11t)$ — 1
- $CP^2 = CQ^2 + PQ^2$ geeft $6^2 + 7^2 = (6+2t)^2 + (7-11t)^2 + (2t)^2 + (-11t)^2$ — 1
- Dit geeft $t = \frac{13}{25}$ ($t = 0$ voldoet niet) — 1
- Het antwoord $Q(3\frac{1}{25}, -2\frac{18}{25})$ — 1

**10 maximumscore 5**

- De hoogte van driehoek $CDQ$, met basis $CD$, moet $\frac{2}{3}$ deel zijn van de zijde van het vierkant — 1
- Dus $DQ : PQ = 2:1$ — 1
- ($\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OD} + \frac{2}{3}\cdot\overrightarrow{DP}$ geeft) $\overrightarrow{OQ} = \begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} + \frac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix} -2 \\ 11 \end{pmatrix}$ — 2
- Het antwoord $Q(\frac{8}{3}, -\frac{2}{3})$ — 1

## Anderhalf keer zo groot

**11 maximumscore 8**

- $f'(x) = 2x$, dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $2p$ — 1
- Een vergelijking van de raaklijn is $y = 2p(x - p) + p^2$ (of een vergelijkbare uitdrukking) — 1
- Hieruit volgt dat de $x$-coördinaat van $A$ gelijk is aan $\frac{1}{2}p$ — 1
- De oppervlakte van driehoek $OAP$ is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot p^2 = \frac{1}{4}p^3$ — 1
- Een vergelijking van de lijn door $O$ en $P$ is $y = px$ — 1
- De oppervlakte van $V$ is $\int_0^p \left(px - x^2\right) \mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $px - x^2$ is $\frac{1}{2}px^2 - \frac{1}{3}x^3$ — 1
- De oppervlakte van $V$ is $\frac{1}{6}p^3$, dus de oppervlakte van driehoek $OAP$ is anderhalf keer zo groot als de oppervlakte van $V$ — 1

of

- De oppervlakte van driehoek $OPP'$, met $P'(p, 0)$, is $\frac{1}{2} \cdot p \cdot p^2 = \frac{1}{2}p^3$ — 1
- De oppervlakte van $V$ is $\frac{1}{2}p^3 - \int_0^p x^2 \, \mathrm{d}x$ — 1
- Een primitieve van $x^2$ is $\frac{1}{3}x^3$ — 1
- De oppervlakte van $V$ is $\frac{1}{2}p^3 - \frac{1}{3}p^3 = \frac{1}{6}p^3$ — 1
- $f'(x) = 2x$, dus de richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $2p$ — 1
- $\frac{P'P}{AP'} = 2p$, dus $\frac{p^2}{AP'} = 2p$ — 1
- Hieruit volgt $AP' = \frac{p^2}{2p} = \frac{1}{2}p$, dus $OA = OP' - AP' = p - \frac{1}{2}p = \frac{1}{2}p$ — 1
- De oppervlakte van driehoek $OAP$ is $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}p \cdot p^2 = \frac{1}{4}p^3$, dus de oppervlakte van driehoek $OAP$ is anderhalf keer zo groot als de oppervlakte van $V$ — 1

## Een baan

**12 maximumscore 3**

- $\cos(\pi-a)\sin(2(\pi-a))=\cos(\pi-a)\sin(2\pi-2a)=\cos(\pi-a)\cdot-\sin(2a)$ 1
- $\cos(\pi-a)\cdot-\sin(2a)=-\cos(a)\cdot-\sin(2a)=\cos(a)\cdot\sin(2a)$ 1
- Dus de $x$-coördinaat van $P_{\pi-a}$ is gelijk aan de $x$-coördinaat van $P_a$ (dus de lijn door $P_a$ en $P_{\pi-a}$ is verticaal) 1

of

- De lijn door $P_a$ en $P_{\pi-a}$ is verticaal als de $x$-coördinaten van $P_a$ en $P_{\pi-a}$ gelijk zijn 1
- Er moet dus gelden dat $\cos(\pi-a)\sin(2(\pi-a))=\cos(a)\sin(2a)$ 1
- $-\cos(a)\cdot-\sin(2a)=\cos(a)\cdot\sin(2a)$ en dus bevinden beide punten zich recht boven elkaar, waarmee het gestelde bewezen is 1

of

- Er moet bewezen worden dat $\cos(\pi-a)\sin(2(\pi-a))=\cos(a)\sin(2a)$ 1
- $\sin(2(\pi-a))=\sin(2\pi-2a)=-\sin(2a)$ 1
- Omdat $\cos(\pi-a)=-\cos(a)$ geldt nu $\cos(\pi-a)\cdot\sin(2(\pi-a))=-\cos(a)\cdot-\sin(2a)=\cos(a)\cdot\sin(2a)$ en dus bevinden beide punten zich recht boven elkaar, waarmee het gestelde bewezen is 1

**13 maximumscore 5**

- Er moet gelden $2\cdot|x(t)|=|y(t)|$ 1
- $2\cdot|\cos(t)\sin(2t)|=|\cos(t)|$ geeft $\cos(t)=0$ of $|\sin(2t)|=\frac{1}{2}$ 1
- $\cos(t)=0$ geeft $t=\frac{1}{2}\pi$ of $t=1\frac{1}{2}\pi$ (en deze laten we buiten beschouwing) 1
- $|\sin(2t)|=\frac{1}{2}$ geeft $2t=\frac{1}{6}\pi+k\cdot\pi$ of $2t=\frac{5}{6}\pi+k\cdot\pi$ 1
- De oplossing $t=\frac{11}{12}\pi$ 1

*Opmerkingen*

– *Als gerekend is met $|x(t)|=2\cdot|y(t)|$ voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.*
– *Als gerekend is met $y(t)=2\cdot x(t)$ voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.*
– *Als gerekend is met $x(t)=2\cdot y(t)$ voor deze vraag maximaal 1 scorepunt toekennen.*

**14 maximumscore 5**

- Er geldt voor $t = \frac{3}{4}\pi$: $\overrightarrow{OP_t} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\sin\left(2\cdot\frac{3}{4}\pi\right) \\ \cos\left(\frac{3}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ 1
- $x'(t) = -\sin(t)\sin(2t) + \cos(t)\cdot 2\cos(2t)$ 2
- $y'(t) = -\sin(t)$ 1
- Er geldt voor $t = \frac{3}{4}\pi$:
  $\vec{v} = \begin{pmatrix} -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right)\sin\left(2\cdot\frac{3}{4}\pi\right) + 2\cos\left(\frac{3}{4}\pi\right)\cos\left(2\cdot\frac{3}{4}\pi\right) \\ -\sin\left(\frac{3}{4}\pi\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ -\frac{1}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix}$ (en dus zijn $\overrightarrow{OP_t}$ en $\vec{v}$ gelijk) 1

*Opmerking*
*Als de product- en/of kettingregel niet of onjuist is toegepast, voor deze vraag maximaal 3 scorepunten toekennen.*

## Buiten een vierkant

**15 maximumscore 5**

- Een vergelijking van de cirkel is $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ — 1
- De lijn door $A$ en $C$ heeft vergelijking $y=4-x$ — 1
- De cirkel snijden met deze lijn geeft $x^2-5x+4=0$ — 1
- Dan volgt $(x-1)(x-4)=0$ dus de $x$-coördinaat van $F$ is 1 (want $x=4$ geeft punt $A$) — 1
- $F(1, 3)$ en omdat $C(0, 4)$ en $S(2, 2)$ (of: omdat $F$ op $CS$ ligt en $x_F=1=\frac{0+2}{2}=\frac{x_C+x_S}{2}$) is $F$ het midden van $CS$ — 1

of

- (Omdat $C(0, 4)$ en $S(2, 2)$ geldt:) het midden van $CS$ is het punt $(1, 3)$ — 1
- De afstand tussen $(1, 3)$ en $(3, 2)$ is $\sqrt{5}$ — 1
- Ook geldt $MA(=MB)=\sqrt{5}$ — 1
- Dus $(1, 3)$ ligt op de gegeven cirkel — 1
- Dus is $F$ het midden van $CS$ — 1

of

- (Omdat $C(0, 4)$ en $S(2, 2)$ geldt:) het midden van $CS$ is het punt $(1, 3)$ — 1
- Een vergelijking van de cirkel is $(x-3)^2+(y-2)^2=5$ — 1
- De lijn door $A$ en $C$ heeft vergelijking $y=4-x$ — 1
- Omdat $(1-3)^2+(3-2)^2=5$ ligt $(1, 3)$ op de cirkel — 1
- Omdat $3=4-1$ ligt $(1, 3)$ op de lijn door $A$ en $C$ (en dus is $F$ het midden van $CS$) — 1

**16 maximumscore 3**

- $\overrightarrow{MF} \cdot \overrightarrow{MB} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$ dus $\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) = 90°$ 1
- $\overrightarrow{MG} \cdot \overrightarrow{MA} = \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 0$ dus $\angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90°$ 1
- $\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) + \angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90° + 90° = 180°$ (of: cirkelsector *BMF* is een kwart cirkel en cirkelsector *GMA* is een kwart cirkel), dus de oppervlakte van de twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel 1

of

- $\text{rc}_{MB} = 2$ en $\text{rc}_{FM} = -\frac{1}{2}$ dus $\text{rc}_{MB} \cdot \text{rc}_{FM} = -1$ en dus $\overrightarrow{MB} \perp \overrightarrow{MF}$ 1
- $\text{rc}_{MA} = -2$ en $\text{rc}_{GM} = \frac{1}{2}$ dus $\text{rc}_{MA} \cdot \text{rc}_{GM} = -1$ en dus $\overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MG}$ 1
- Dan volgt: cirkelsector *BMF* is een kwart cirkel en cirkelsector *GMA* is een kwart cirkel (of: $\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MB}) + \angle(\overrightarrow{MG}, \overrightarrow{MA}) = 90° + 90° = 180°$), dus de oppervlakte van de twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel 1

of

- $\cos(\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MG})) = \dfrac{\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \end{pmatrix}\right|} = \dfrac{3}{5}$ 1
- $\cos(\angle(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA})) = \dfrac{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right|} = -\dfrac{3}{5}$ 1
- $\cos(180° - \alpha) = -\cos(\alpha)$, dus $\angle(\overrightarrow{MF}, \overrightarrow{MG}) + \angle(\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) = 180°$, dus de oppervlakte van de twee sectoren samen is gelijk aan de helft van de oppervlakte van de cirkel 1

*Opmerking*
*Wanneer de hoeken zijn benaderd voor deze vraag maximaal 2 scorepunten toekennen.*

## 5 Aanleveren scores

Verwerk de scores van alle kandidaten per examinator in de applicatie Wolf.
Accordeer deze gegevens voor Cito uiterlijk op 25 juni.