Examen VWO

2022

tijdvak 3
woensdag 6 juli
9.00 - 12.00 uur

wiskunde B

Dit examen bestaat uit 17 vragen.
Voor dit examen zijn maximaal 76 punten te behalen.
Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Formules

Goniometrie

$$\sin(t+u)=\sin(t)\cos(u)+\cos(t)\sin(u)$$
$$\sin(t-u)=\sin(t)\cos(u)-\cos(t)\sin(u)$$
$$\cos(t+u)=\cos(t)\cos(u)-\sin(t)\sin(u)$$
$$\cos(t-u)=\cos(t)\cos(u)+\sin(t)\sin(u)$$

$$\sin(2t)=2\sin(t)\cos(t)$$
$$\cos(2t)=\cos^2(t)-\sin^2(t)=2\cos^2(t)-1=1-2\sin^2(t)$$

Ga verder op de volgende pagina.

Gelijke oppervlaktes

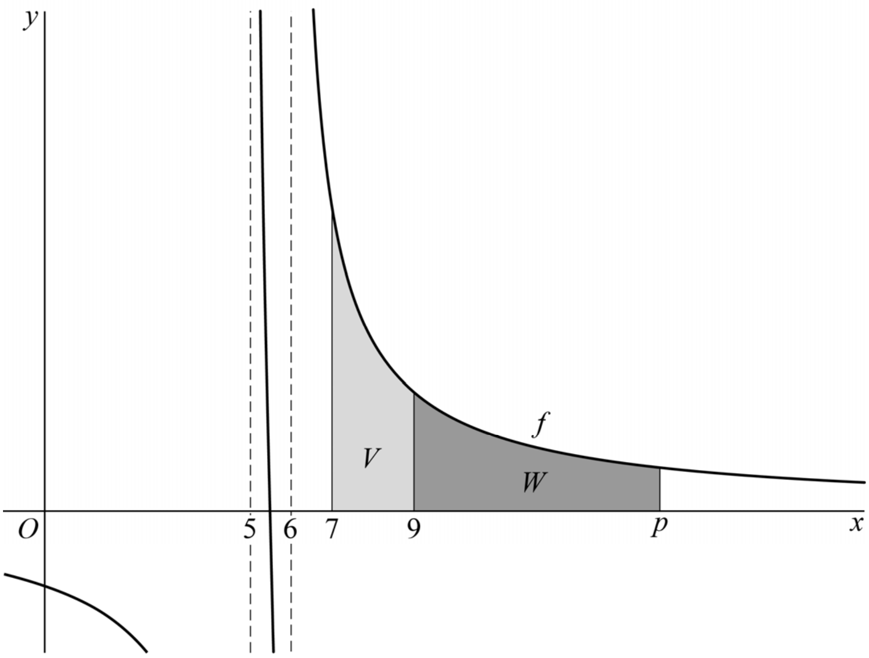
De functie f is gegeven door $f(x) = \frac{1}{x-5} + \frac{1}{x-6}$.

De functie F gegeven door $F(x) = \ln(x^2 - 11x + 30)$ is dan een primitieve van f.

3p **1** Bewijs dit.

In figuur 1 is de grafiek van f (die uit drie delen bestaat) getekend.

figuur 1



V is het gebied begrensd door de grafiek van f, de x-as en de lijnen met vergelijking $x = 7$ en $x = 9$. W is het gebied begrensd door de grafiek van f, de x-as en de lijnen met vergelijking $x = 9$ en $x = p$, met $p > 9$.

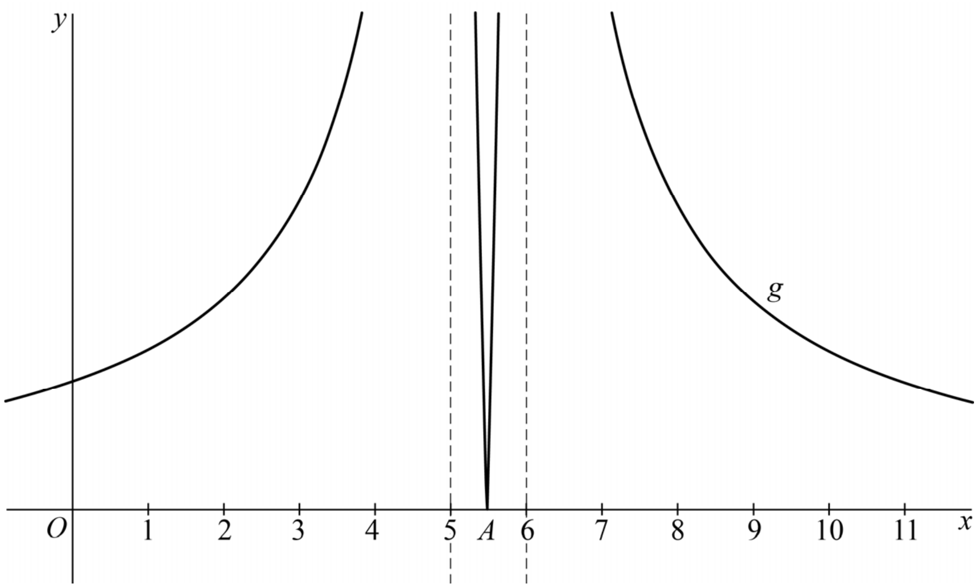
Er is een waarde van p waarvoor de oppervlaktes van V en W gelijk zijn.

5p **2** Bereken exact deze waarde van p.

De functie g is gegeven door $g(x) = \left| \dfrac{1}{x-5} + \dfrac{1}{x-6} \right|$.

In figuur 2 is de grafiek van g getekend.
Deze grafiek is symmetrisch in de lijn $x = 5\frac{1}{2}$.

figuur 2



De grafiek van g heeft in punt $A(5\frac{1}{2}, 0)$ een knik.

Zowel aan het deel van de grafiek links van A als aan het deel van de grafiek rechts van A is er een raaklijn in A. Deze twee raaklijnen zijn verschillend.

5p **3** Bereken algebraïsch de hoek tussen deze raaklijnen. Geef je eindantwoord in gehele graden nauwkeurig.

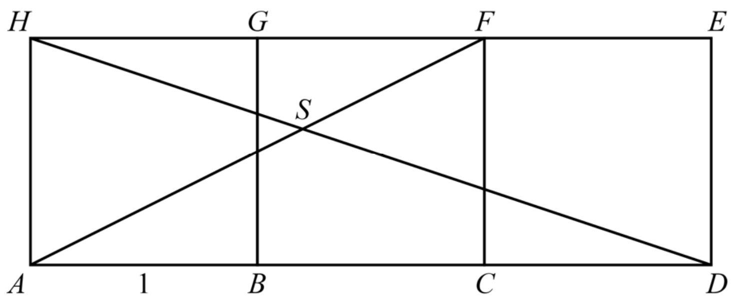
Drie op een rij

Rechthoek $ADEH$ bestaat uit drie vierkanten $ABGH$, $BCFG$ en $CDEF$.

Hierbij is $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Verder zijn gegeven de lijnstukken AF en HD.
S is het snijpunt van AF en HD.
Zie de figuur.

figuur



Er geldt: $\overrightarrow{AS} = \begin{pmatrix} \frac{6}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix}$

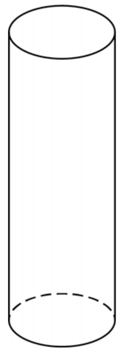
3p **4** Bewijs dit.

3p **5** Onderzoek of de vectoren $\overrightarrow{BS}$ en $\overrightarrow{HD}$ loodrecht op elkaar staan.

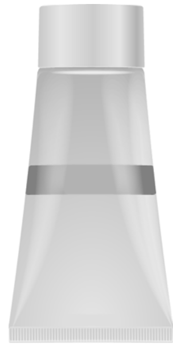
Modeltube

In figuur 1 is een cilindervormige koker getekend met diameter 4 cm.
Als de cirkel aan de onderkant wordt samengeknepen tot een lijnstuk, ontstaat een model voor een tube zonder dop. Op de foto zie je zo'n tube maar dan met dop.
Deze tube, die bijvoorbeeld shampoo kan bevatten, heeft, zonder dop, een hoogte van 10 cm en aan de bovenkant een diameter van 4 cm.

figuur 1



foto



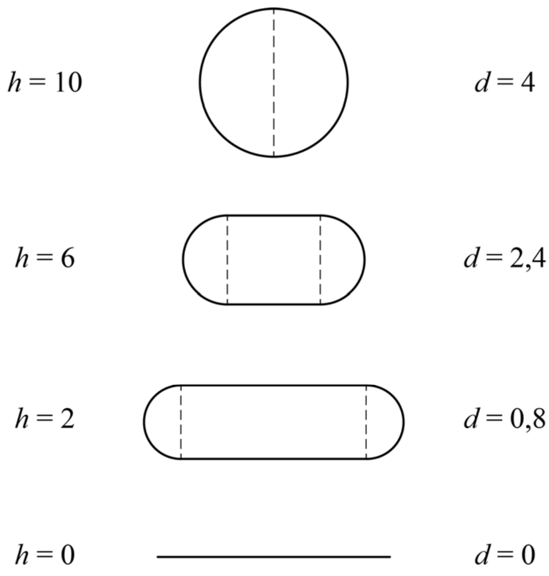
In het vervolg van de opgave worden horizontale doorsneden van de rechtopstaande modeltube bekeken.

Het model heeft drie uitgangspunten:
- De doorsnede op hoogte h, gemeten vanaf de onderkant, bestaat voor $0 < h < 10$ uit twee halve cirkels en twee evenwijdige lijnstukken van gelijke lengte.
- De omtrek van elke doorsnede is gelijk aan de omtrek van de cilinder.
- De afstand tussen de twee lijnstukken in de doorsnede is gelijk aan de diameter van de halve cirkels. Deze afstand neemt voor $0 < h < 10$ lineair toe van 0 tot 4.

In figuur 2 is op vier hoogtes de doorsnede getekend.
De oppervlakte A van een doorsnede hangt af van de hoogte h.
Met behulp van bovenstaande drie uitgangspunten kan een formule worden opgesteld voor $A(h)$.
De inhoud I van de modeltube kan met behulp van deze formule voor $A(h)$ worden berekend.

Er geldt: $I = \int_0^{10} A(h)\,\mathrm{d}h$

figuur 2

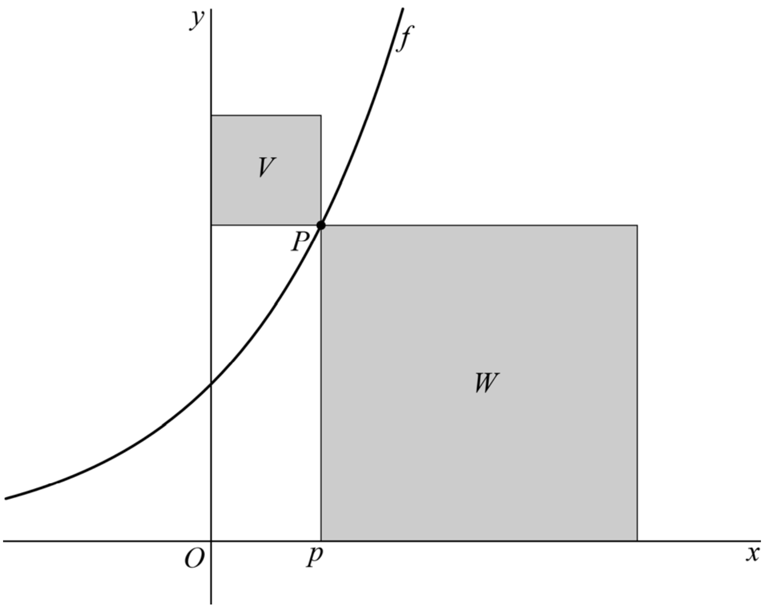


6p **6** Onderzoek of de modeltube 80 cm^3 shampoo kan bevatten.

Vierkanten bij een exponentiële functie

De functie f is gegeven door $f(x) = \mathrm{e}^x$.
Op de grafiek van f ligt een punt $P(p, \mathrm{e}^p)$ met $p > 0$.
Zie de figuur.

figuur



In de figuur zijn ook de vierkanten V en W getekend.
Van vierkant V is P een hoekpunt en ligt een zijde op de y-as.
Van vierkant W is P een hoekpunt en ligt een zijde op de x-as.

Voor elke waarde van p bekijken we de verhouding:

$$R = \frac{\text{oppervlakte van vierkant } V}{\text{oppervlakte van vierkant } W}$$

Er is een waarde van p waarvoor R maximaal is.

8p **7** Bereken exact de maximale waarde van R.

Gelijke hoeken

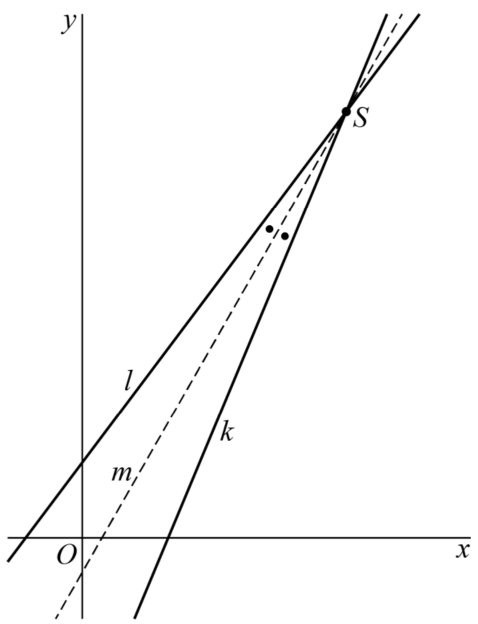
Gegeven is de lijn k met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ 4 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 5 \\ 12 \end{pmatrix}$ en de lijn l met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 24 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

De lijnen k en l snijden elkaar in een punt S.

Lijn m is een lijn met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix} + u\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix}$.

De waarden van a en b kunnen zo worden gekozen dat m de scherpe hoek die de lijnen k en l met elkaar maken, in twee gelijke hoeken verdeelt.
In de figuur is deze situatie getekend.

figuur



In deze situatie geldt $a = 1\frac{3}{4}$.

4p **8** Bewijs dit.

5p **9** Bereken exact de waarde van b.

Verouderingskromme

De Rijksgebouwendienst beschrijft in een handboek manieren om de conditie van gebouwen te bepalen. Op basis van inspecties waarbij voor elk bouwdeel (deel van een gebouw) een **conditiescore** wordt vastgesteld, is het mogelijk plannen voor onderhoud, renovatie en nieuwbouw te maken.

Een conditiescore is een geheel getal van 1 tot en met 6. Conditiescore 1 hoort bij een nieuw bouwdeel. Naarmate de leeftijd van het bouwdeel toeneemt, zal slijtage optreden en daarbij horen hogere conditiescores. Als het bouwdeel niet meer bruikbaar is, krijgt het conditiescore 6.

In een model waarmee de conditiescore van een bouwdeel wordt berekend, wordt gebruikgemaakt van drie variabelen:
– t : de leeftijd van het bouwdeel (in jaren),
– L: de theoretische levensduur van het bouwdeel (in jaren) als het niet wordt onderhouden en
– C: een getal waarmee de uiteindelijke conditiescore wordt berekend.
Hierbij is $t \leq L$.

Oorspronkelijk werd door de inspecteurs van de Rijksgebouwendienst voor een normaal verouderingsproces het volgende verband tussen deze variabelen gehanteerd:

$$C = 6 - 5\left(1 - \frac{t}{L}\right)^{\frac{1}{2,3}} \qquad (1)$$

De uiteindelijke conditiescore werd bepaald door bij de berekende waarde van C alle decimalen weg te laten. Zo geldt bijvoorbeeld voor een bouwdeel met een leeftijd die gelijk is aan een kwart van zijn theoretische levensduur dat $C \approx 1,59$. In dat geval is de conditiescore gelijk aan 1.

Door het weglaten van de decimalen leveren verschillende leeftijden soms dezelfde conditiescore op.

3p **10** Bereken voor een bouwdeel met een theoretische levensduur van 25 jaar gedurende hoeveel jaar dat bouwdeel conditiescore 2 krijgt. Geef je antwoord in één decimaal nauwkeurig.

De Rijksgebouwendienst hanteerde ook een formule waarin t is uitgedrukt in L en C. Deze formule ontstaat door formule (1) te herleiden tot een formule van de volgende vorm:

$$t = L - L \cdot a(6 - C)^{b} \qquad (2)$$

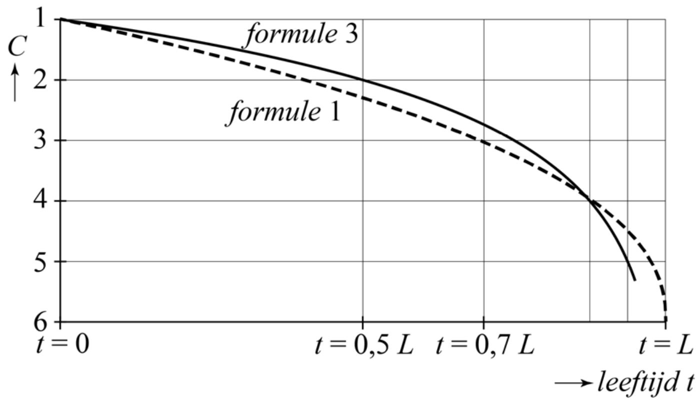
4p **11** Bepaal de waarden van a en b door formule 1 te herleiden tot formule 2. Rond je berekende waarden zo nodig af op drie decimalen.

Nieuwe inzichten van de inspecteurs hebben ertoe geleid dat in de loop van de tijd formule 1 is vervangen door:

$$C = 1 + {}^{\frac{1}{2}}\log\left(1 - \frac{t}{L}\right) \qquad (3)$$

In de figuur is van formule 1 en van formule 3 de bijbehorende **verouderingskromme** weergegeven. De kromme die hoort bij formule 1 is gestippeld weergegeven.
Op de verticale as staat C; hoge waarden van C staan onderaan.

figuur



Op de horizontale as staat de leeftijd t van een bouwdeel uitgedrukt in de theoretische levensduur L. Zo betekent $t = 0,5L$ dat een bouwdeel de helft van zijn theoretische levensduur heeft bereikt.

In de figuur is te zien dat volgens formule 1 conditiescore 3 wordt bereikt als de leeftijd van een bouwdeel bijna 70 procent van de theoretische leeftijd is. Volgens formule 3 bereikt dat bouwdeel conditiescore 3 later dan volgens formule 1.

3p **12** Bereken exact na hoeveel procent van de theoretische levensduur het bouwdeel conditiescore 3 bereikt volgens formule 3.

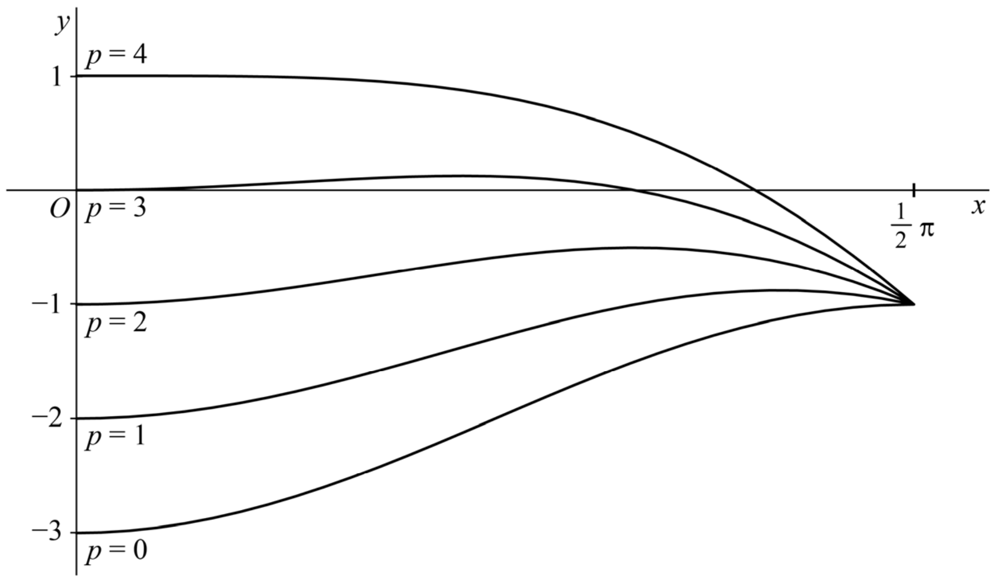
Cosinusgrafiek door hoogste punten

Voor elke p met $0 \leq p \leq 4$ wordt de functie f_p met domein $0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$ gegeven door:

$$f_p(x) = -2\cos^2(x) + p \cdot \cos(x) - 1$$

In figuur 1 is voor enkele waarden van p de grafiek van f_p getekend.

figuur 1

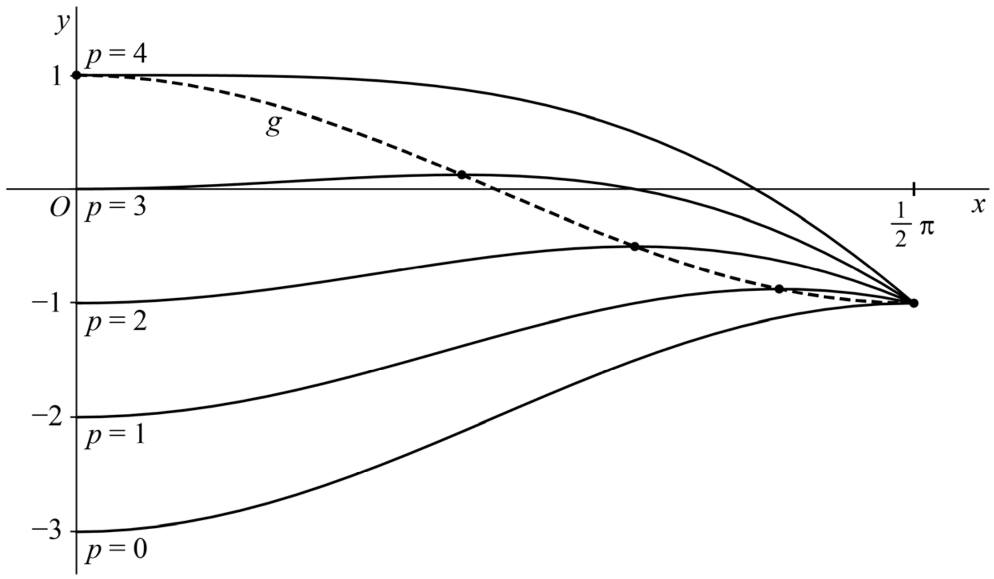


De grafiek van f_3 heeft behalve de oorsprong een tweede gemeenschappelijk punt met de x-as.

4p **13** Bereken exact de x-coördinaat van dat tweede gemeenschappelijke punt.

De grafiek van f_p heeft voor $p = 4$ een hoogste punt voor $x = 0$. Ook voor de andere waarden van p heeft de grafiek van f_p een hoogste punt. In figuur 2 is telkens met een dikke stip het hoogste punt van de grafiek van f_p aangegeven. De gestippelde kromme verbindt deze hoogste punten met elkaar.

figuur 2



Voor de x-coördinaat a van het hoogste punt van de grafiek van f_p geldt dat $\cos(a) = \frac{1}{4}p$.

4p **14** Bewijs dit.

De kromme die de hoogste punten van de grafieken van f_p verbindt, is de grafiek van de functie g gegeven door $g(x) = \cos(2x)$, met $0 \le x \le \frac{1}{2}\pi$.

4p **15** Bewijs dit.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Loodrecht door de parabool

Gegeven zijn de bewegingsvergelijkingen:

$$\begin{cases} x(t) = t^2 \\ y(t) = t \end{cases}$$

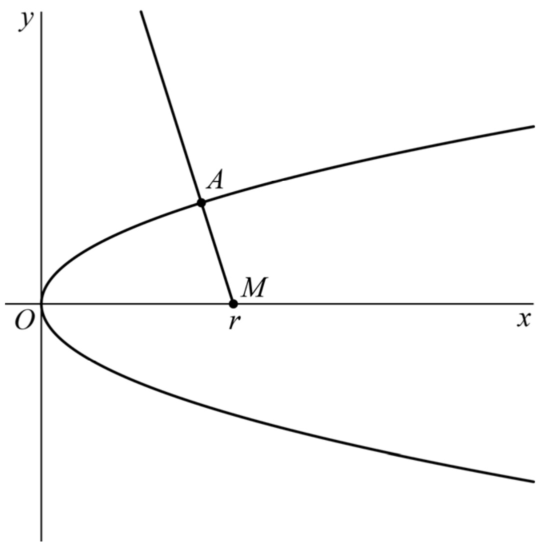
De bijbehorende baan is een parabool. Punt $M(r, 0)$ is een punt op de positieve x-as met $r > \frac{1}{2}$.

We kiezen punt $A(a, \sqrt{a})$ op de parabool zodanig dat de halve lijn vanuit M door A de parabool loodrecht snijdt in punt A.
Zie figuur 1.

Er geldt:

$$a = r - \frac{1}{2}$$

figuur 1

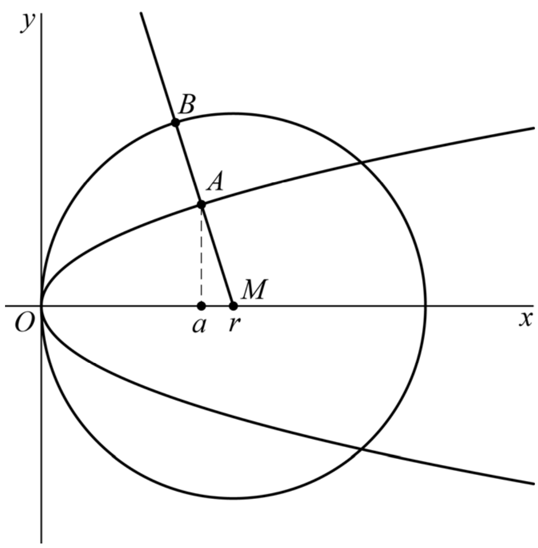


6p **16** Bewijs dit.

We voegen de cirkel toe met middelpunt $M(r, 0)$ en straal r.
Het punt $O(0, 0)$ ligt op deze cirkel en op de gegeven parabool.

De halve lijn vanuit M door A snijdt de cirkel in punt B.
Zie figuur 2.

figuur 2



Voor een bepaalde waarde van r is A het midden van lijnstuk MB.

6p **17** Bereken exact deze waarde van r.