

Examen VWO

2023

tijdvak 2
tijdsduur: 3 uur

wiskunde C

Bij dit examen hoort een uitwerkbijlage.

Dit examen bestaat uit 23 vragen.

Voor dit examen zijn maximaal 74 punten te behalen.

Voor elk vraagnummer staat hoeveel punten met een goed antwoord behaald kunnen worden.

Als bij een vraag een verklaring, uitleg of berekening vereist is, worden aan het antwoord meestal geen punten toegekend als deze verklaring, uitleg of berekening ontbreekt.

Geef niet meer antwoorden (redenen, voorbeelden e.d.) dan er worden gevraagd. Als er bijvoorbeeld twee redenen worden gevraagd en je geeft meer dan twee redenen, dan worden alleen de eerste twee in de beoordeling meegeteld.

Showroom

Op de foto zie je de showroom van een autobedrijf in Lochem. De pijl in de foto geeft de voorkant van de showroom aan.

foto



De showroom heeft de vorm van een balk met afmetingen 18 bij 18 bij 2,8 meter met daarbovenop een regelmatige piramide met hetzelfde vierkante grondvlak en hoogte 5,6 meter.

- 3p 1 Bereken de inhoud van de showroom. Geef je antwoord in een geheel aantal m^3 .

Een opvallend aspect in het ontwerp van de showroom is dat de opstaande ribben van het piramidevormige dak tot op de grond verlengd zijn. Dat betekent dat de vier ijzeren balken van de top tot aan de grond doorlopen. Links voor op de foto is van een van deze ijzeren balken het deel dat buiten de showroom zit goed te zien.

Op de uitwerkbijlage is de grond aangegeven waarop de showroom is gebouwd.

- 3p 2 Teken op de uitwerkbijlage op schaal 1 : 200 het vooraanzicht van de showroom inclusief de ijzeren balken. Laat daarbij ramen, deuren en dergelijke buiten beschouwing.

Op de uitwerkbijlage is het onderste balkvormige deel van de showroom in perspectief getekend. De horizon is ook getekend.

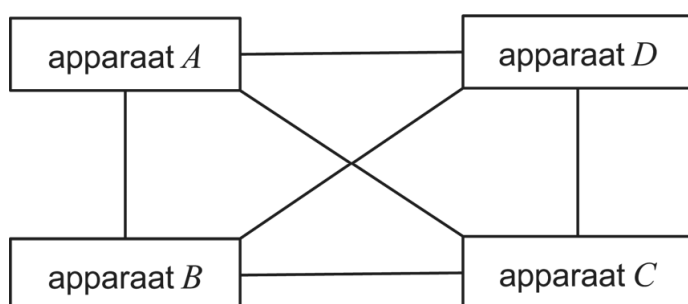
- 6p 3 Teken in deze tekening de drie ijzeren balken die zichtbaar zijn. Geef hierbij door middel van punten duidelijk de eindpunten aan van de ijzeren balken op de grond.

Het internet der dingen

Tegenwoordig zijn er steeds meer apparaten die via het internet met elkaar in verbinding kunnen staan. Denk bijvoorbeeld aan smartphones en smartwatches maar ook aan de 'slimme' deurbel en thermostaat, enzovoorts.

Als bijvoorbeeld vier apparaten A , B , C en D volledig onderling met elkaar verbonden zijn – dat wil zeggen dat ieder apparaat met ieder ander apparaat verbonden is – dan zijn daar zes verbindingen voor nodig. In figuur 1 wordt dit geïllustreerd, waarbij de lijnen de onderlinge verbindingen voorstellen.

figuur 1



- 3p 4 Bereken het minimale aantal onderling volledig verbonden apparaten waarbij er meer dan honderd verbindingen nodig zijn.

Elk apparaat dat met het internet verbonden is, heeft zijn eigen, unieke **IP-adres** nodig. IP-adressen kunnen worden geschreven als acht groepen van vier zogeheten **hexadecimale cijfers**, gescheiden door dubbele punten. Hiervoor worden de gewone cijfers 0 tot en met 9 uitgebreid met de cijfers A (=10) tot en met F (=15). Dus A tot en met F zijn in deze toepassing ook cijfers en géén letters.

voorbeeld van een geldig IP-adres:

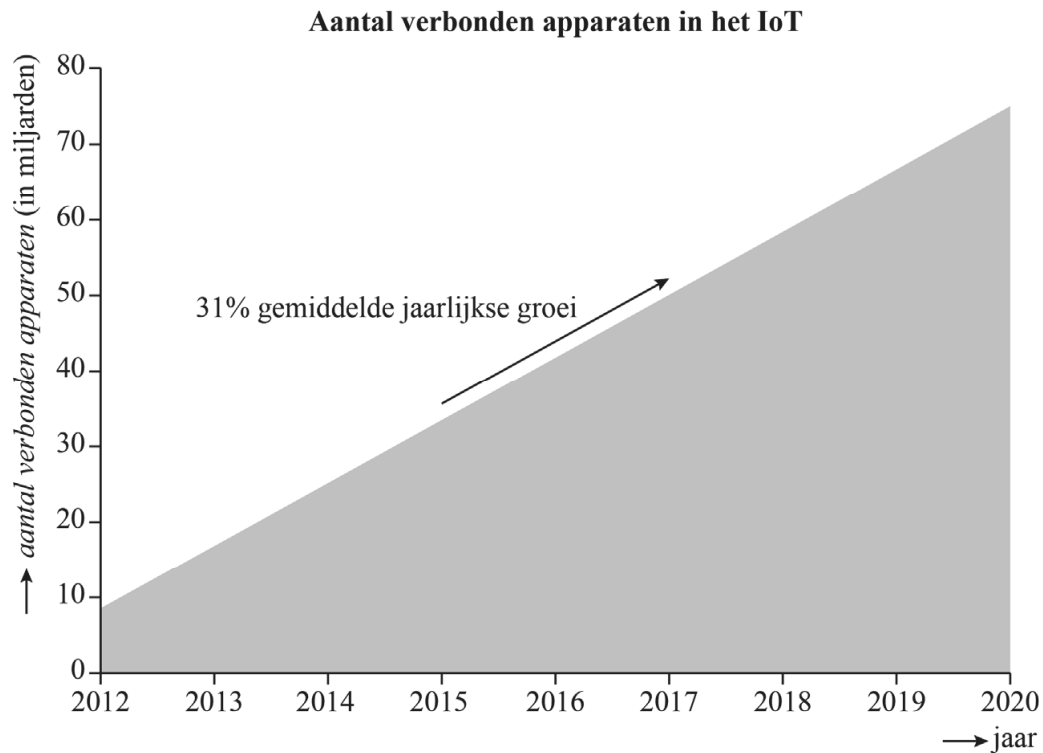
2001:0DB8:85A3:0000:1319:8A2E:0370:7344

- 3p 5 Bereken hoeveel IP-adressen er theoretisch mogelijk zijn. Geef je antwoord in de vorm $a \cdot 10^b$ met a in één decimaal en b als geheel getal.

Het totaal aantal apparaten ('dingen') die via internetverbindingen met andere apparaten of systemen in contact staan en daarmee gegevens uitwisselen, wordt het **internet der dingen** genoemd. Het internet der dingen wordt afgekort tot **IoT** (naar het Engels: Internet of Things).

In figuur 2, uit een internet-artikel uit november 2013, gaat men uit van 31% jaarlijkse groei van het IoT.

figuur 2



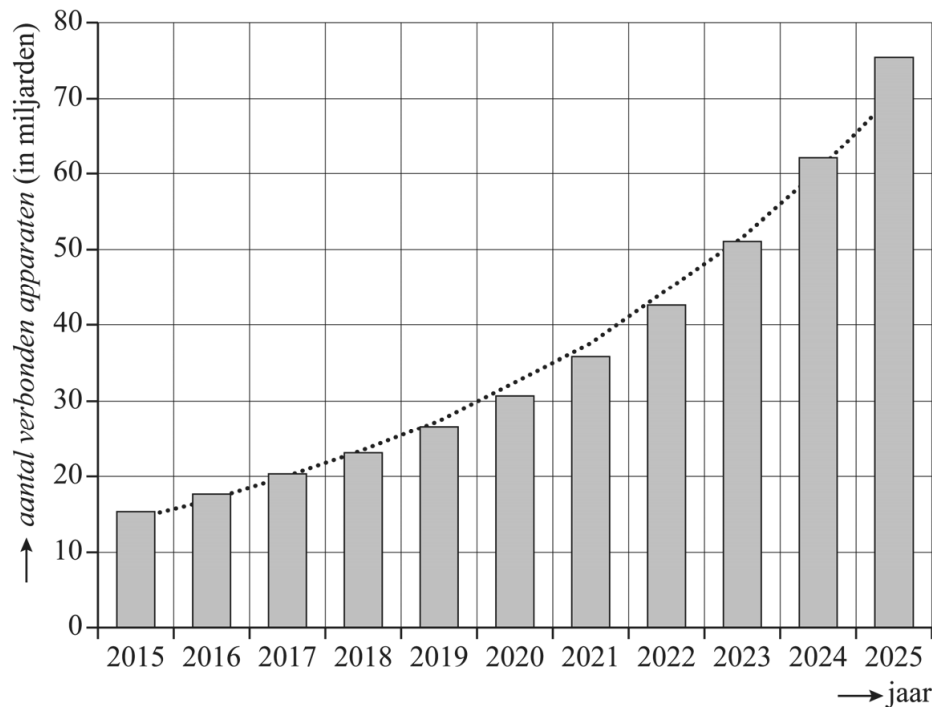
De grafiek in figuur 2 uit het internet-artikel en de aanname van 31% jaarlijkse groei uit datzelfde artikel spreken elkaar tegen.

2p **6** Leg uit waar dit uit blijkt.

4p **7** Bereken na hoeveel hele weken het IoT verdubbeld is bij 31% jaarlijkse groei.

De 31% jaarlijkse groei uit het eerder genoemde internet-artikel is inmiddels naar beneden bijgesteld. In figuur 3 zie je hoe het IoT zich volgens een ander onderzoek sinds het jaar 2015 ontwikkelt. Hierin zijn de gegevens voor de jaren na 2018 voorspelde gegevens. De trendlijn is gestippeld weergegeven.

figuur 3



In december 2015 was de omvang van het IoT 15,41 miljard apparaten. In december 2025 is dit (volgens de voorspelling) 75,44 miljard. Ook volgens de gegevens in figuur 3 groeit het IoT bij benadering met een vast percentage per jaar.

- 3p 8 Bereken dit percentage met behulp van de gegevens van de jaren 2015 en 2025. Geef je antwoord in één decimaal.

De trendlijn in figuur 3 kan benaderd worden met de volgende formule:

$$I = 14,7 \cdot 1,17^t$$

Hierin is I de omvang van het IoT in miljarden en t de tijd in jaren met $t = 0$ in december 2015. Veronderstel dat de formule voor I ook na 2025 geldt.

- 4p 9 Bereken met behulp van de formule voor I in welk jaar het IoT voor het eerst meer dan drie keer zo veel apparaten zal bevatten als eind 2025.

Fibonacci-klok

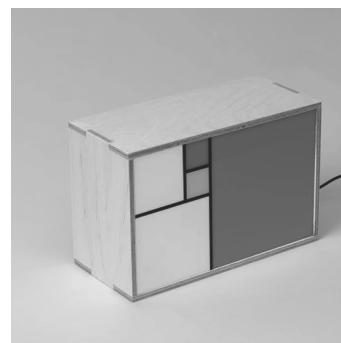
Op internet is een bijzondere klok te koop: de Fibonacci-klok. Zie de foto.

De klok is gebaseerd op een bekende wiskundige rij: de rij van Fibonacci. Van deze rij zijn de eerste tien termen de getallen:

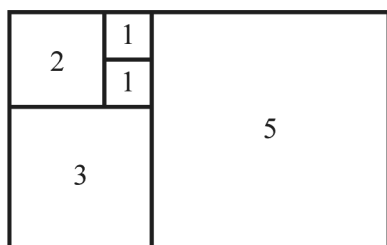
1 – 1 – 2 – 3 – 5 – 8 – 13 – 21 – 34 – 55

Op de foto zie je dat de klok uit vijf vierkanten bestaat. Deze vierkanten stellen de getallen uit de rij van Fibonacci voor. Dit is ook in onderstaande figuur weergegeven.

foto



figuur



De getallen in de figuur geven een maat voor de lengte van de zijden van de vierkanten in de figuur aan.

- 2p **10** Bereken hoeveel keer zo groot de oppervlakte van het grootste vierkant is als de oppervlakte van het op één na grootste vierkant. Geef je antwoord in één decimaal.

Achter elk van de vierkanten zitten drie lampjes verborgen: een rood, een groen en een blauw. Van deze lampjes brandt er steeds hooguit één. Hierdoor zijn er voor elk vierkant 4 mogelijkheden: het vlak staat 'uit', óf het vlak heeft een kleur: rood, groen of blauw. Met behulp van deze kleuren kun je de tijd aflezen.

De klok werkt volgens de 12-uurs-notatie. Daarbij wordt 12.00 weergegeven als 0.00.

Elke 5 minuten verspringt de klok. Als de werkelijke tijd bijvoorbeeld 14.50 of 14.53 is, geeft de klok op beide tijdstippen 2.50 weer.

De klok heeft veel meer standen dan dat er tijden zijn die de klok kan weergeven.

- 4p **11** Bereken hoeveel keer zo veel. Geef je antwoord als geheel getal.

Je kunt de tijd op de klok als volgt aflezen:

- Tel de waarden van getallen in de blauw gekleurde en de rood gekleurde vierkanten bij elkaar op. Dat zijn de uren.
- Tel de waarden van getallen in de blauw gekleurde en de groen gekleurde vierkanten bij elkaar op en vermenigvuldig de uitkomst met 5. Dat zijn de minuten.

De blauw gekleurde vierkanten tellen dus bij zowel de uren als de minuten mee. In tabel 1 zie je een manier om met alleen maar rood en groen gekleurde vierkanten de tijd 7.25 weer te geven.

tabel 1

vierkant	1	1	2	3	5
kleur	rood	rood	rood	rood	groen

Op een bepaald moment branden de lampjes op de klok zoals in tabel 2 is weergegeven.

tabel 2

vierkant	1	1	2	3	5
kleur	blauw	– (uit)	groen	rood	rood

- 3p 12 Bereken welke tijd de klok volgens tabel 2 weergeeft.

Op deze klok kunnen veel tijden op meer dan een manier worden weergegeven. In tabel 3 staan twee verschillende manieren om de tijd 7.25 weer te geven.

tabel 3

vierkant	1	1	2	3	5
kleur	rood	rood	rood	rood	groen
kleur	– (uit)	– (uit)	rood	– (uit)	blauw

- 4p 13 Geef nog twee andere manieren om de tijd 7.25 weer te geven.

Iemand wil een vergelijkbare Fibonacci-klok met groene, rode en blauwe lampjes maken, die de werkelijke tijden op de minuut nauwkeurig kan weergeven in de 24-uurs notatie (dus van 0.00 tot en met 23.59). Die klok moet dan aan twee eisen voldoen:

- 1 Het grootst mogelijke getal moet een optelling zijn met als uitkomst (minstens) 59.
- 2 Alle getallen van 0 t/m 59 moeten kunnen worden gevormd.

Om zo'n klok te maken, moeten er aan de klok uit de figuur vierkanten worden toegevoegd die Fibonacci-getallen voorstellen.

- 4p 14 Onderzoek welke opeenvolgende getallen uit de rij van Fibonacci dan minimaal aan de klok moeten worden toegevoegd **en** licht toe dat de klok dan inderdaad aan beide eisen voldoet.

Unieke woorden

Teksten bestaan uit woorden (en leestekens, maar die laten we in deze opgave buiten beschouwing). Deze woorden zijn niet allemaal verschillend. Dat wil zeggen dat ze niet allemaal uniek zijn. Hoe meer unieke woorden je naar verhouding tegenkomt, hoe moeilijker de tekst is.

In deze opgave kijken we naar het percentage unieke woorden in een tekst. Dit percentage wordt bepaald aan de hand van twee grootheden:

U : het aantal unieke woorden in een stuk tekst;

T : het totaal aantal woorden in dat stuk tekst.

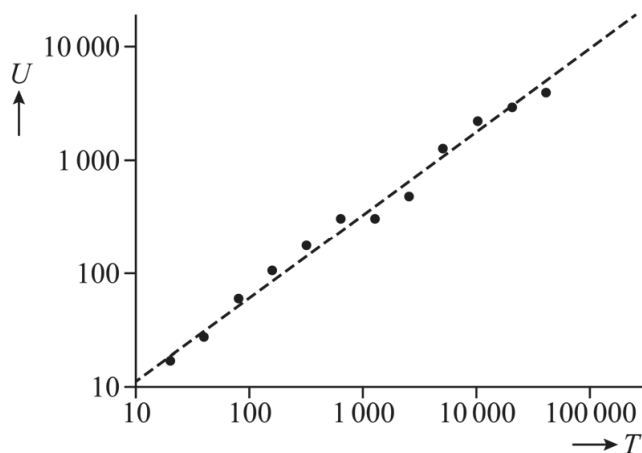
We bekijken de eerste twee zinnen van deze opgave:

Teksten bestaan uit woorden (en leestekens, maar die laten we in deze opgave buiten beschouwing). Deze woorden zijn niet allemaal verschillend.

- 2p **15** Bepaal het percentage unieke woorden in de eerste twee zinnen van deze opgave samen. Geef je antwoord als geheel getal.

Van het boek *On The Origin of Species* van Charles Darwin is het verband tussen U en T bepaald. Zie figuur 1.

figuur 1



In figuur 1 is op beide assen een logaritmische schaal gebruikt. De gestippelde lijn geeft een benadering van het verband tussen U en T . Figuur 1 staat ook vergroot op de uitwerkbijlage.

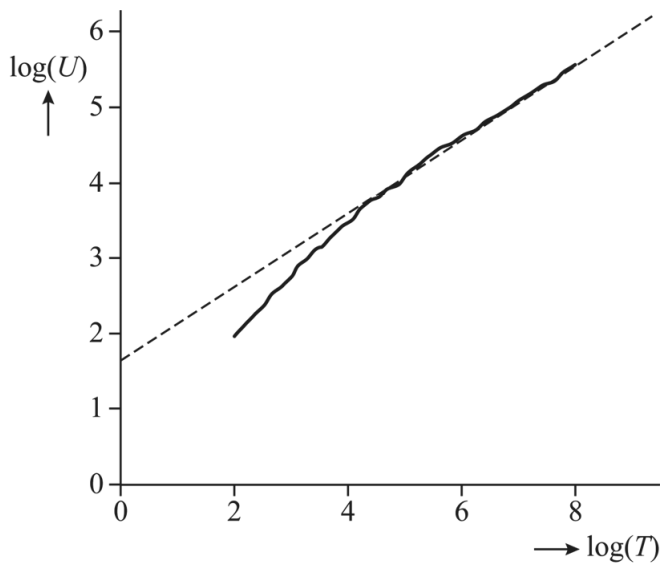
On The Origin of Species bevat in totaal 191 740 woorden en er komen 8842 unieke woorden in voor. Naarmate je verder leest, kom je steeds minder nieuwe unieke woorden tegen. Als je een kwart van dit boek hebt gelezen, ben je al meer dan de helft van het totaal aantal unieke woorden tegengekomen.

- 5p 16 Bereken met behulp van de gestippelde lijn in de figuur op de uitwerkbijlage hoeveel procent van het totaal aantal unieke woorden je dan al bent tegengekomen. Geef je antwoord als geheel getal.

De taalkundige Gustav Herdan ontdekte een algemeen verband tussen U en T voor grotere teksten. Dit verband werd door Harold Stanley Heap bekendgemaakt en wordt de **wet van Herdan-Heap** genoemd.

De internationale nieuwsdienst Reuters heeft een database – de zogeheten **RCV1** – beschikbaar gesteld ten behoeve van taalonderzoek. Onderzoekers hebben voor RCV1 het verband tussen U en T bepaald. Zie figuur 2, waarin $\log(U)$ tegen $\log(T)$ is uitgezet.

figuur 2



De grafiek in figuur 2 geeft het werkelijke verband tussen U en T in RCV1 en de gestippelde lijn geeft een benadering volgens de wet van Herdan-Heap.

Iemand leest een tekst die bestaat uit de eerste 7432 woorden uit RCV1.

- 2p **17** Ga met behulp van figuur 2 na of deze tekst voldoet aan de wet van Herdan-Heap.

Een formule voor de gestippelde lijn in figuur 2 is

$$\log(U) = 0,49\log(T) + 1,64$$

- 3p **18** Benader met behulp van deze formule het aantal unieke woorden in de eerste 1 000 000 woorden in RCV1. Geef je antwoord in duizenden.

De formule $\log(U) = 0,49\log(T) + 1,64$ kan geschreven worden als

$$U = 43,65 \cdot T^{0,49}.$$

Stel nu dat je RCV1 in zijn geheel gaat lezen. Als je dan drie keer zo ver bent gekomen, wil dat niet zeggen dat je ook drie keer zo veel unieke woorden bent tegengekomen. Met behulp van de formule $U = 43,65 \cdot T^{0,49}$ kun je berekenen hoeveel procent meer unieke woorden je dan wel bent tegengekomen.

- 4p **19** Bereken dit percentage. Geef je antwoord als geheel getal.

Examenzitting

Om ervoor te zorgen dat tijdens een zitting van een centraal examen alles eerlijk en in heel Nederland zo gelijk mogelijk verloopt, zijn er strikte regels.

Hieronder zie je een voorbeeld van een aantal regels die in het examenreglement van een school in Nederland opgenomen zijn.

Gang van zaken tijdens zittingen van het centraal examen

1. Het bevoegd gezag draagt er zorg voor dat het nodige toezicht bij het centraal examen wordt uitgeoefend.
- ...
7. Een kandidaat die te laat komt, mag tot uiterlijk een half uur na de aanvang van de zitting worden toegelaten. (Hij/zij levert zijn werk in op het tijdstip dat voor de andere kandidaten geldt.)
8. Het eerste uur van de zitting mag de kandidaat geen werk inleveren of het examenlokaal verlaten.
9. Gedurende het laatste kwartier mag de kandidaat geen werk inleveren en het examenlokaal niet verlaten.

In deze opgave laten we het recht op tijdverlenging, dat voor een aantal kandidaten geldt, buiten beschouwing. Ook gaan we ervan uit dat alle kandidaten op tijd komen.

De zitting van het centraal examen vwo wiskunde C duurt 180 minuten.

- 2p **20** Bereken hoeveel procent van de tijd kandidaten het examenlokaal mogen verlaten. Geef je antwoord in hele procenten.

We voeren de volgende notaties in:

- H: het eerste halfuur van de examen­zitting is bezig;
- U: het eerste uur van de examen­zitting is bezig;
- K: het laatste kwartier van de examen­zitting is bezig.

Op de uitwerkbijlage is een begin gemaakt van een Venn-diagram van een examen­zitting. De rechthoek stelt de hele examen­zitting voor en het gebied voor U is hierin al getekend.

- 2p **21** Vul het Venn-diagram op de uitwerkbijlage op de juiste wijze aan met de gebieden voor H en K.

Let op: de laatste vragen van dit examen staan op de volgende pagina.

Verder voeren we de volgende notaties in:

- V : de kandidaat mag de zaal verlaten;
- I : de kandidaat mag zijn/haar werk inleveren.

Johan vertaalt regel 8 met de volgende formule: $U \Rightarrow (\neg I \vee V)$. Dit is echter niet de bedoeling van regel 8, want de bedoeling van regel 8 is dat de kandidaat het eerste uur van de examenzitting geen werk mag inleveren en het examenlokaal niet mag verlaten.

Als de formule van Johan juist zou zijn, kunnen er twee situaties optreden die niet de bedoeling zijn van regel 8.

- 3p **22** Geef de vertaling van de formule van Johan en geef vervolgens de twee situaties die volgens deze formule kunnen optreden, maar niet de bedoeling zijn van regel 8.

Voor het laatste onderdeel gaan we ervan uit dat regel 8 luidt:
"Het eerste uur van de zitting mag de kandidaat geen werk inleveren én het examenlokaal niet verlaten."

Volgens regels 8 en 9 geldt voor het eerste uur en het laatste kwartier precies hetzelfde. Door middel van één logische bewering over U , K , V , en I kunnen regels 8 en 9 tegelijkertijd beschreven worden.

- 3p **23** Noteer deze bewering met behulp van logische symbolen.

Bronvermelding

Een opsomming van de in dit examen gebruikte bronnen, zoals teksten en afbeeldingen, is te vinden in het bij dit examen behorende correctievoorschrift.