Correctievoorschrift VWO

2024

tijdvak 2

wiskunde B

Het correctievoorschrift bestaat uit:
1 Regels voor de beoordeling
2 Algemene regels
3 Vakspecifieke regels
4 Beoordelingsmodel
5 Aanleveren scores
6 Bronvermeldingen

1 Regels voor de beoordeling

Het werk van de kandidaten wordt beoordeeld met inachtneming van de artikelen 3.21, 3.24 en 3.25 van het Uitvoeringsbesluit WVO 2020.
Voorts heeft het College voor Toetsen en Examens op grond van artikel 2 lid 2d van de Wet College voor toetsen en examens de Regeling beoordelingsnormen en bijbehorende scores centraal examen vastgesteld.
Voor de beoordeling zijn de volgende aspecten van de artikelen 3.21 t/m 3.25 van het Uitvoeringsbesluit WVO 2020 van belang:

1 De directeur doet het gemaakte werk met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen en het proces-verbaal van het examen toekomen aan de examinator. Deze kijkt het werk na en zendt het met zijn beoordeling aan de directeur. De examinator past de beoordelingsnormen en de regels voor het toekennen van scorepunten toe die zijn gegeven door het College voor Toetsen en Examens.
2 De directeur doet de van de examinator ontvangen stukken met een exemplaar van de opgaven, de beoordelingsnormen, het proces-verbaal en de regels voor het bepalen van de score onverwijld aan de directeur van de school van de gecommitteerde toekomen. Deze stelt het ter hand aan de gecommitteerde.

3 De gecommitteerde beoordeelt het werk zo spoedig mogelijk en past de beoordelingsnormen en de regels voor het bepalen van de score toe die zijn gegeven door het College voor Toetsen en Examens.
De gecommitteerde voegt bij het gecorrigeerde werk een verklaring betreffende de verrichte correctie. Deze verklaring wordt mede ondertekend door het bevoegd gezag van de gecommitteerde.
4 De examinator en de gecommitteerde stellen in onderling overleg het behaalde aantal scorepunten voor het centraal examen vast.
5 Indien de examinator en de gecommitteerde daarbij niet tot overeenstemming komen, wordt het geschil voorgelegd aan het bevoegd gezag van de gecommitteerde. Dit bevoegd gezag kan hierover in overleg treden met het bevoegd gezag van de examinator. Indien het geschil niet kan worden beslecht, wordt hiervan melding gemaakt aan de inspectie. De inspectie kan een derde onafhankelijke corrector aanwijzen. De beoordeling van deze derde corrector komt in de plaats van de eerdere beoordelingen.

2 Algemene regels

Voor de beoordeling van het examenwerk zijn de volgende bepalingen uit de regeling van het College voor Toetsen en Examens van toepassing:
1 De examinator vermeldt op een lijst de namen en/of nummers van de kandidaten, het aan iedere kandidaat voor iedere vraag toegekende aantal scorepunten en het totaal aantal scorepunten van iedere kandidaat.
2 Voor het antwoord op een vraag worden door de examinator en door de gecommitteerde scorepunten toegekend, in overeenstemming met correctievoorschrift. Scorepunten zijn de getallen 0, 1, 2, ..., n, waarbij n het maximaal te behalen aantal scorepunten voor een vraag is. Andere scorepunten die geen gehele getallen zijn, of een score minder dan 0 zijn niet geoorloofd.
3 Scorepunten worden toegekend met inachtneming van de volgende regels:
3.1 indien een vraag volledig juist is beantwoord, wordt het maximaal te behalen aantal scorepunten toegekend;
3.2 indien een vraag gedeeltelijk juist is beantwoord, wordt een deel van de te behalen scorepunten toegekend in overeenstemming met het beoordelingsmodel;
3.3 indien een antwoord op een open vraag niet in het beoordelingsmodel voorkomt en dit antwoord op grond van aantoonbare, vakinhoudelijke argumenten als juist of gedeeltelijk juist aangemerkt kan worden, moeten scorepunten worden toegekend naar analogie of in de geest van het beoordelingsmodel;
3.4 indien slechts één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, wordt uitsluitend het eerstgegeven antwoord beoordeeld;
3.5 indien meer dan één voorbeeld, reden, uitwerking, citaat of andersoortig antwoord gevraagd wordt, worden uitsluitend de eerstgegeven antwoorden beoordeeld, tot maximaal het gevraagde aantal;
3.6 indien in een antwoord een gevraagde verklaring of uitleg of afleiding of berekening ontbreekt dan wel foutief is, worden 0 scorepunten toegekend tenzij in het beoordelingsmodel anders is aangegeven;

3.7 indien in het beoordelingsmodel verschillende mogelijkheden zijn opgenomen, gescheiden door het teken /, gelden deze mogelijkheden als verschillende formuleringen van hetzelfde antwoord of onderdeel van dat antwoord;

3.8 indien in het beoordelingsmodel een gedeelte van het antwoord tussen haakjes staat, behoeft dit gedeelte niet in het antwoord van de kandidaat voor te komen;

3.9 indien een kandidaat op grond van een algemeen geldende woordbetekenis, zoals bijvoorbeeld vermeld in een woordenboek, een antwoord geeft dat vakinhoudelijk onjuist is, worden aan dat antwoord geen scorepunten toegekend, of tenminste niet de scorepunten die met de vakinhoudelijke onjuistheid gemoeid zijn.

4 Het juiste antwoord op een meerkeuzevraag is de hoofdletter die behoort bij de juiste keuzemogelijkheid. Als het antwoord op een andere manier is gegeven, maar onomstotelijk vaststaat dat het juist is, dan moet dit antwoord ook goed gerekend worden. Voor het juiste antwoord op een meerkeuzevraag wordt het in het beoordelingsmodel vermelde aantal scorepunten toegekend. Voor elk ander antwoord worden geen scorepunten toegekend. Indien meer dan één antwoord gegeven is, worden eveneens geen scorepunten toegekend.

5 Een fout mag in de uitwerking van een vraag maar één keer worden aangerekend, tenzij daardoor de vraag aanzienlijk vereenvoudigd wordt en/of tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

6 Een zelfde fout in de beantwoording van verschillende vragen moet steeds opnieuw worden aangerekend, tenzij in het beoordelingsmodel anders is vermeld.

7 Indien de examinator of de gecommitteerde meent dat in een examen of in het beoordelingsmodel bij dat examen een fout of onvolkomenheid zit, beoordeelt hij het werk van de kandidaten alsof examen en beoordelingsmodel juist zijn. Hij kan de fout of onvolkomenheid mededelen aan het College voor Toetsen en Examens. Het is niet toegestaan zelfstandig af te wijken van het beoordelingsmodel. Met een eventuele fout wordt bij de definitieve normering van het examen rekening gehouden.

8 Scorepunten worden toegekend op grond van het door de kandidaat gegeven antwoord op iedere vraag. Er worden geen scorepunten vooraf gegeven.

9 Het cijfer voor het centraal examen wordt als volgt verkregen.
Eerste en tweede corrector stellen de score voor iedere kandidaat vast. Deze score wordt meegedeeld aan de directeur.
De directeur stelt het cijfer voor het centraal examen vast op basis van de regels voor omzetting van score naar cijfer.

NB1 *T.a.v. de status van het correctievoorschrift:*
Het College voor Toetsen en Examens heeft de correctievoorschriften bij regeling vastgesteld. Het correctievoorschrift is een zogeheten algemeen verbindend voorschrift en valt onder wet- en regelgeving die van overheidswege wordt verstrekt. De corrector mag dus niet afwijken van het correctievoorschrift.

NB2 *T.a.v. het verkeer tussen examinator en gecommitteerde (eerste en tweede corrector):*
Het aangeven van de onvolkomenheden op het werk en/of het noteren van de behaalde scores bij de vraag is toegestaan, maar niet verplicht. Evenmin is er een standaardformulier voorgeschreven voor de vermelding van de scores van de kandidaten. Het vermelden van het schoolexamencijfer is toegestaan, maar niet verplicht. Binnen de ruimte die de regelgeving biedt, kunnen scholen afzonderlijk of in gezamenlijk overleg keuzes maken.

NB3 *T.a.v. aanvullingen op het correctievoorschrift:*
Er zijn twee redenen voor een aanvulling op het correctievoorschrift: verduidelijking en een fout.
Verduidelijking
Het correctievoorschrift is vóór de afname opgesteld. Na de afname blijkt pas welke antwoorden kandidaten geven. Vragen en reacties die via het Examenloket bij de Toets- en Examenlijn binnenkomen, kunnen duidelijk maken dat het correctievoorschrift niet voldoende recht doet aan door kandidaten gegeven antwoorden. Een aanvulling op het correctievoorschrift kan dan alsnog duidelijkheid bieden.
Een fout
Als het College voor Toetsen en Examens vaststelt dat een centraal examen een fout bevat, kan het besluiten tot een aanvulling op het correctievoorschrift.

Een aanvulling op het correctievoorschrift wordt door middel van een mailing vanuit Examenblad.nl bekendgemaakt. Een aanvulling op het correctievoorschrift wordt zo spoedig mogelijk verstuurd aan de examensecretarissen.
Soms komt een onvolkomenheid pas geruime tijd na de afname aan het licht. In die gevallen vermeldt de aanvulling:

– Als het werk al naar de tweede corrector is gezonden, past de tweede corrector deze aanvulling op het correctievoorschrift toe.
  en/of
– Als de aanvulling niet is verwerkt in de naar Cito gezonden Wolf-scores, voert Cito dezelfde wijziging door die de correctoren op de verzamelstaat doorvoeren.

Dit laatste gebeurt alleen als de aanvulling luidt dat voor een vraag alle scorepunten moeten worden toegekend.

Als een onvolkomenheid op een dusdanig laat tijdstip geconstateerd wordt dat een aanvulling op het correctievoorschrift ook voor de tweede corrector te laat komt, houdt het College voor Toetsen en Examens bij de vaststelling van de N-term rekening met de onvolkomenheid.

3 Vakspecifieke regels

Voor dit examen zijn de volgende vakspecifieke regels vastgesteld:

1 Voor elke rekenfout of verschrijving in de berekening wordt 1 scorepunt in mindering gebracht tot het maximum van het aantal scorepunten dat voor dat deel van die vraag kan worden gegeven.

2 De algemene regel 3.6 geldt ook bij de vragen waarbij de kandidaten de grafische rekenmachine gebruiken. Bij de betreffende vragen geven de kandidaten een toelichting waaruit blijkt hoe zij de GR hebben gebruikt.

3a Als bij een vraag doorgerekend wordt met tussenantwoorden die afgerond zijn, en dit leidt tot een ander eindantwoord dan wanneer doorgerekend is met niet-afgeronde tussenantwoorden, wordt bij de betreffende vraag één scorepunt in mindering gebracht. Tussenantwoorden mogen wel afgerond genoteerd worden.

3b Uitzondering zijn die gevallen waarin door de context wordt bepaald dat tussenantwoorden moeten worden afgerond.

4 Beoordelingsmodel

Vraag	Antwoord	Scores

Twee functies

1 maximumscore 4

- $p = x\sqrt{x}$ geeft de vergelijking $72 - p^2 = p$ — 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $p = -9$ of $p = 8$ — 1
- Hieruit volgt $x = 4$ ($p = -9$ voldoet niet) — 1
- Dus de coördinaten van S zijn $(4, 8)$ — 1

of

- De vergelijking $72 - x^3 = x\sqrt{x}$ herschrijven tot $x^3 + x\sqrt{x} - 72 = 0$ — 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $x\sqrt{x} = 8$ of $x\sqrt{x} = -9$ — 1
- Hieruit volgt $x = 4$ ($x\sqrt{x} = -9$ geeft geen oplossingen) — 1
- Dus de coördinaten van S zijn $(4, 8)$ — 1

of

- De vergelijking $72 - x^3 = x\sqrt{x}$ herleiden tot $x^6 - 145x^3 + 5184 = 0$ — 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $x^3 = 64$ of $x^3 = 81$ — 1
- Hieruit volgt $x = 4$ ($x^3 = 81$ voldoet niet) — 1
- Dus de coördinaten van S zijn $(4, 8)$ — 1

2 maximumscore 5

- $f'(x) = -3x^2$ — 1
- $-3x^2 = -12$ geeft $x = 2$ ($x = -2$ voldoet niet) — 1
- De integraal $\int_0^2 (-12x + 88 - (72 - x^3))\,\mathrm{d}x$ moet worden berekend — 1
- Een primitieve van $x^3 - 12x + 16$ is $\frac{1}{4}x^4 - 6x^2 + 16x$ — 1
- Invullen van de grenzen geeft oppervlakte 12 — 1

Cobb-Douglas-productiefunctie

3 maximumscore 2

- $50\,000L + 20\,000K = 1\,000\,000$ herleiden tot $K = 50 - 2,5L$ — 1
- Substitutie geeft $Y = 40 \cdot L^{0,7} \cdot (50 - 2,5L)^{0,3}$ — 1

of

- Het aantal machines bij 0 voltijdbanen is $\frac{1\,000\,000}{20\,000} = 50$ en voor elke voltijdbaan kunnen $\frac{50\,000}{20\,000} = 2,5$ machines minder worden besteld, dus het aantal machines is $K = 50 - 2,5L$ — 1
- Substitutie geeft $Y = 40 \cdot L^{0,7} \cdot (50 - 2,5L)^{0,3}$ — 1

4 maximumscore 5

- $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}L} = 28 \cdot L^{-0,3} \cdot (50 - 2,5L)^{0,3} - 30 \cdot L^{0,7} \cdot (50 - 2,5L)^{-0,7}$ — 2
- $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}L} = 0$ als $\frac{28 \cdot \left(50 - 2,5L\right)^{0,3}}{L^{0,3}} = \frac{30L^{0,7}}{\left(50 - 2,5L\right)^{0,7}}$ — 1
- Hieruit volgt $28 \cdot (50 - 2,5L) = 30L$ — 1
- Dit geeft $L = 14$ (dus het gevraagde aantal voltijdbanen is 14) — 1

Opmerking
Als in het eerste antwoordelement de productregel en/of de kettingregel niet is gebruikt, mogen voor dit antwoordelement geen scorepunten worden toegekend. Als de productregel en/of de kettingregel wel is gebruikt, maar niet correct, mag voor dit antwoordelement hoogstens 1 scorepunt worden toegekend op basis van vakspecifieke regel 1.

5 maximumscore 4

- Er moet bewezen worden dat $gY = A \cdot (gL)^{\alpha} \cdot (gK)^{\beta}$ — 1
- ($\beta = 1 - \alpha$ dus) $(gL)^{\alpha} \cdot (gK)^{1-\alpha} = g^{\alpha} \cdot L^{\alpha} \cdot g^{1-\alpha} \cdot K^{1-\alpha}$ — 1
- Dit herschrijven tot $g \cdot L^{\alpha} \cdot K^{1-\alpha} = g \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$ — 1
- Dus $A \cdot (gL)^{\alpha} \cdot (gK)^{\beta} = A \cdot g \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} = gY$ — 1

of

- Er moet bewezen worden dat $gY = A \cdot (gL)^{\alpha} \cdot (gK)^{\beta}$ — 1
- $A \cdot (gL)^{\alpha} \cdot (gK)^{\beta} = A \cdot g^{\alpha} \cdot L^{\alpha} \cdot g^{\beta} \cdot K^{\beta}$ — 1
- $A \cdot g^{\alpha} \cdot L^{\alpha} \cdot g^{\beta} \cdot K^{\beta} = g^{\alpha+\beta} \cdot A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$ — 1
- Dan volgt (omdat $\alpha + \beta = 1$) $g^{\alpha+\beta} \cdot A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} = g \cdot A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta} = gY$ — 1

Loodrecht op de snelheidsvector

6 maximumscore 3

- $AP = \sqrt{(\sin(t))^2 + (\frac{1}{2}\sqrt{2} - \cos(t - \frac{1}{4}\pi))^2}$ 1
- Beschrijven hoe het maximum van AP kan worden berekend 1
- De maximale afstand is gelijk aan 1,88 1

7 maximumscore 4

- $x'(t) = \cos(t)$ 1
- $y'(t) = -\sin(t - \frac{1}{4}\pi)$ 1
- Uit $\overrightarrow{OP} \perp \vec{v}$ volgt $\sin(t) \cdot \cos(t) - \cos(t - \frac{1}{4}\pi) \cdot \sin(t - \frac{1}{4}\pi) = 0$ 1
- Dit herleiden tot $\sin(2t) = \sin(2t - \frac{1}{2}\pi)$ 1

8 maximumscore 3

- $\sin(2t) = \sin(2t - \frac{1}{2}\pi)$ geeft $2t = \pi - 2t + \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ ($2t = 2t - \frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ geeft geen oplossing) 1
- Dit geeft $4t = 1\frac{1}{2}\pi + k \cdot 2\pi$ 1
- Dit geeft voor t de waarden $\frac{3}{8}\pi$, $\frac{7}{8}\pi$, $\frac{11}{8}\pi$ en $\frac{15}{8}\pi$ 1

Passende parabool

9 maximumscore 6

- $f(0)=2$ geeft $c=2$ 1
- $f'(x)=2ax+b$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $-\sqrt{3}$ 1
- $f'(0)=-\sqrt{3}$ geeft $b=-\sqrt{3}$ (dus $f(x)=ax^2-\sqrt{3}\cdot x+2$) 1
- De grafiek van f raakt de x-as dus $D=3-8a=0$ 1
- Hieruit volgt $a=\frac{3}{8}$ (dus $f(x)=\frac{3}{8}x^2-\sqrt{3}\cdot x+2$) 1

of

- $f(0)=2$ geeft $c=2$ 1
- $f'(x)=2ax+b$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $-\sqrt{3}$ 1
- $f'(0)=-\sqrt{3}$ geeft $b=-\sqrt{3}$ (dus $f(x)=ax^2-\sqrt{3}\cdot x+2$) 1
- Voor de top van de grafiek van f geldt $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2a}$ en uit $f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2a}\right)=0$ volgt

  $\dfrac{3}{4a}-\dfrac{3}{2a}+2=0$ 1
- Hieruit volgt $a=\frac{3}{8}$ (dus $f(x)=\frac{3}{8}x^2-\sqrt{3}\cdot x+2$) 1

of

- Een vergelijking van een parabool is $y=a(x-p)^2$, dus $\dfrac{dy}{dx}=2a(x-p)$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de raaklijn is $-\sqrt{3}$ 1
- ($(0, 2)$ ligt op de parabool, dus) $2=a(0-p)^2$ en dus $2=ap^2$ 1
- In $(0, 2)$ geldt $\dfrac{dy}{dx}=-\sqrt{3}$ dus $2a(0-p)=-\sqrt{3}$ en dus $2ap=\sqrt{3}$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt dat $p=\frac{4}{\sqrt{3}}$ en $a=\frac{3}{8}$ 1
- $y=\frac{3}{8}\left(x-\frac{4}{\sqrt{3}}\right)^2$ herleiden tot $f(x)=\frac{3}{8}x^2-\sqrt{3}\cdot x+2$ (en dus $b=\sqrt{3}$ en

  $c=2$) 1

Lijnenparen

10 maximumscore 4

- (m gaat door P en S, dus) de richtingscoëfficiënt van m is $\dfrac{4-ax}{10-x}$ 1
- Uit $\dfrac{4-ax}{10-x}=-a$ volgt $2ax=10a+4$ 1
- Hieruit volgt $a=\dfrac{2}{x-5}$ 1
- $y=ax$ geeft $y=\dfrac{2x}{x-5}$ 1

of

- (m gaat door P en S, dus) de richtingscoëfficiënt van m is $\dfrac{4-ax}{10-x}$ 1
- Uit $\dfrac{4-ax}{10-x}=-a$ volgt $2ax=10a+4$ 1
- Hieruit volgt $x=5+\dfrac{2}{a}$ en $y=5a+2$ 1
- Dit invullen in $y=\dfrac{2x}{x-5}$ geeft $y=\dfrac{2\cdot\left(5+\frac{2}{a}\right)}{5+\frac{2}{a}-5}=\dfrac{10a+4}{2}=5a+2$ (en dat is de y-coördinaat van S, dus S ligt op de grafiek van f) 1

of

- Een vergelijking van lijn m is $y=-a(x-10)+4$ 1
- $a=\dfrac{y}{x}$ invullen geeft $y-4=-\dfrac{y}{x}(x-10)$ 1
- Hieruit volgt $2xy-10y=4x$ 1
- Een herleiding waaruit volgt dat $y=\dfrac{2x}{x-5}$ 1

of

- Een vergelijking van lijn m is $y=-a(x-10)+4$ 1
- $\dfrac{2x}{x-5}=ax$ geeft $ax^2-5ax-2x=0$ 1
- Hieruit volgt $x=\dfrac{5a+2}{a}$ ($x=0$ voldoet niet) en $y=5a+2$ 1
- Dit invullen in $y=-a(x-10)+4$ geeft $y=-a\left(\dfrac{2}{a}-5\right)+4=2+5a$ (en dus liggen het snijpunt van k en de grafiek van f op lijn m) 1

11 maximumscore 3

- De afgeleide van $y = \frac{2x}{x-5}$ is $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{2(x-5)-1(2x)}{(x-5)^2}$ 1
- Dit herleiden tot $\frac{-10}{(x-5)^2}$ 1
- Voor elke waarde van x is $\frac{-10}{(x-5)^2} < 0$ (dus daalt de grafiek van f) 1

of

- $y = \frac{2x}{x-5}$ herschrijven tot $y = 2 + \frac{10}{x-5}$ 1
- Als x toeneemt, neemt $x-5$ toe en dus neemt $\frac{10}{x-5}$ af 1
- De waarde van y neemt dus af (dus daalt de grafiek van f) 1

12 maximumscore 6

- $MO = MP = MS = r$ 1
- $MP = \sqrt{(10-r)^2 + 4^2}$ 1
- $r = \sqrt{(10-r)^2 + 4^2}$ geeft $r = 5{,}8$ 1
- $MS = 5{,}8$ met $S\left(x, \dfrac{2x}{x-5}\right)$ geeft $\left(x-5{,}8\right)^2 + \left(\dfrac{2x}{x-5}\right)^2 = 5{,}8^2$ 1
- Dit geeft $x = 7{,}95...$ ($x = 0$, $x = 3{,}64...$ en $x = 10$ voldoen niet) 1
- De gevraagde waarde van a is 0,68 1

of

- De middelloodlijn van lijnstuk OP gaat door (5,2) en heeft richtingscoëfficiënt $-\frac{5}{2}$, dus een vergelijking is $y = -\frac{5}{2}(x-5) + 2$ 1
- M is het snijpunt van de x-as met de middelloodlijn met vergelijking $y = -\frac{5}{2}(x-5) + 2$ 1
- Dit geeft $M(5\frac{4}{5}, 0)$ dus $r = 5{,}8$ 1
- $S\left(x, \dfrac{2x}{x-5}\right)$ invullen in de vergelijking van c geeft $\left(x-5{,}8\right)^2 + \left(\dfrac{2x}{x-5}\right)^2 = 5{,}8^2$ 1
- Dit geeft $x = 7{,}95...$ ($x = 0$, $x = 3{,}64...$ en $x = 10$ voldoen niet) 1
- De gevraagde waarde van a is 0,68 1

of

- Voor c geldt: $(x-r)^2 + y^2 = r^2$ 1
- P ligt op c, dus $(10-r)^2 + 4^2 = r^2$ 1
- Hieruit volgt $r = 5{,}8$, dus een vergelijking van c is $(x-5{,}8)^2 + y^2 = 5{,}8^2$ 1
- $S\left(x, \dfrac{2x}{x-5}\right)$ invullen in de vergelijking van c geeft $\left(x-5{,}8\right)^2 + \left(\dfrac{2x}{x-5}\right)^2 = 5{,}8^2$ 1
- Dit geeft $x = 7{,}95...$ ($x = 0$, $x = 3{,}64...$ en $x = 10$ voldoen niet) 1
- De gevraagde waarde van a is 0,68 1

Absolute logaritme

13 maximumscore 4

- Uit ${}^{2}\log(x^2-18x+69)=2$ volgt $x^2-18x+65=0$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $x=5$ of $x=13$ 1
- Uit ${}^{2}\log(x^2-18x+69)=-2$ volgt $x^2-18x+68\frac{3}{4}=0$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $x=5\frac{1}{2}$ of $x=12\frac{1}{2}$ 1

14 maximumscore 4

- De grafiek van f_a heeft twee verticale asymptoten bij de waarden van x waarvoor geldt $x^2-ax+69=0$ 1
- De oplossingen hiervan zijn $x=\dfrac{a+\sqrt{a^2-276}}{2}$ en $x=\dfrac{a-\sqrt{a^2-276}}{2}$ 1
- Het verschil tussen deze oplossingen is 20 als $\dfrac{\sqrt{a^2-276}}{2}=10$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $a=26$ ($a=-26$ voldoet niet) 1

of

- De grafiek van f_a heeft twee verticale asymptoten bij $x=p$ en $x=p+20$ als $x^2-ax+69=(x-p)(x-p-20)$ 1
- De constante termen in deze vergelijking zijn gelijk als $p^2+20p-69=0$ 1
- De oplossing van deze vergelijking is $p=3$ ($p=-23$ voldoet niet) 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $a=(2p+20=)26$ 1

of

- De grafiek van f_a heeft twee verticale asymptoten bij $x=p$ en $x=p+20$ als $\begin{cases} p^2-ap+69=0 \\ (p+20)^2-a(p+20)+69=0 \end{cases}$ 1
- Hieruit volgt $a=2p+20$ 1
- Invullen in een van beide vergelijkingen geeft $p^2+20p-69=0$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $p=3$ ($p=-23$ voldoet niet) en dus $a=(2p+20=)26$ 1

Lijnstukken bij een exponentiële functie

15 maximumscore 5

- Voor de x-coördinaat van het raakpunt geldt $\mathrm{e}^{ax}=\mathrm{e}$, dus $x=\frac{1}{a}$ 1
- $f_a'(x)=a\cdot \mathrm{e}^{ax}$ 1
- De helling van de raaklijn is $f_a'(\frac{1}{a})=a\cdot \mathrm{e}^{a\cdot\frac{1}{a}}=a\mathrm{e}$ 1
- Een mogelijke vergelijking van de raaklijn is $y=a\mathrm{e}\cdot x+b$; deze gaat door $\left(\frac{1}{a},\mathrm{e}\right)$ dus $\mathrm{e}=a\mathrm{e}\cdot\frac{1}{a}+b$ 1
- Dan volgt $b=0$, dus de lijn gaat voor elke waarde van a door de oorsprong 1

of

- $f_a'(x)=a\cdot \mathrm{e}^{ax}$ 1
- De x-coördinaat van het raakpunt van de raaklijn door de oorsprong is oplossing van de vergelijking $a\cdot\mathrm{e}^{ax}=\dfrac{\mathrm{e}^{ax}}{x}$ 1
- Hieruit volgt $x=\frac{1}{a}$ 1
- $f_a(\frac{1}{a})=\mathrm{e}^{a\cdot\frac{1}{a}}=\mathrm{e}$ 1
- Dus de lijn door de oorsprong die raakt aan de grafiek, gaat door het (raak)punt met y-coördinaat e 1

16 maximumscore 7

- $D(1,0)$, $E(\mathrm{e}^a,1)$ en $F(\mathrm{e}^{2a},2)$ 1
- $AD^2=2$, $BE^2=2(\mathrm{e}^a-1)^2$ en $CF^2=2(\mathrm{e}^{2a}-2)^2$ 1
- Dus $AD=\sqrt{2}$, $BE=\sqrt{2}(\mathrm{e}^a-1)$ en $CF=\sqrt{2}(\mathrm{e}^{2a}-2)$ 1
- Uit $AD+BE=CF$ volgt $\sqrt{2}+\sqrt{2}(\mathrm{e}^a-1)=\sqrt{2}(\mathrm{e}^{2a}-2)$ 1
- Herleiden tot $\mathrm{e}^{2a}-\mathrm{e}^a-2=0$ 1
- Dit geeft $(\mathrm{e}^a+1)(\mathrm{e}^a-2)=0$ 1
- Dus $a=\ln(2)$ ($\mathrm{e}^a=-1$ geeft geen oplossing) 1

of

- $D(1, 0)$, $E(\mathrm{e}^a, 1)$ en $F(\mathrm{e}^{2a}, 2)$ 1
- $AD = \sqrt{2}$ en BE is de schuine zijde van een $1-1-\sqrt{2}$-driehoek met rechthoekszijde $\mathrm{e}^a - 1$, dus $BE = \sqrt{2}(\mathrm{e}^a - 1)$ 1
- CF is de schuine zijde van een $1-1-\sqrt{2}$-driehoek met rechthoekszijde $\mathrm{e}^{2a} - 2$, dus $CF = \sqrt{2}(\mathrm{e}^{2a} - 2)$ 1
- Uit $AD + BE = CF$ volgt $\sqrt{2} + \sqrt{2}(\mathrm{e}^a - 1) = \sqrt{2}(\mathrm{e}^{2a} - 2)$ 1
- Herleiden tot $\mathrm{e}^{2a} - \mathrm{e}^a - 2 = 0$ 1
- Dit geeft $(\mathrm{e}^a + 1)(\mathrm{e}^a - 2) = 0$ 1
- Dus $a = \ln(2)$ ($\mathrm{e}^a = -1$ geeft geen oplossing) 1

of

- $D(1, 0)$, $E(\mathrm{e}^a, 1)$ en $F(\mathrm{e}^{2a}, 2)$ 1
- $BE = \sqrt{(\mathrm{e}^a - 1)^2 + (1 - \mathrm{e}^a)^2} = \sqrt{2\mathrm{e}^{2a} - 4\mathrm{e}^a + 2}$ 1
- $CF = \sqrt{(\mathrm{e}^{2a} - 2)^2 + (2 - \mathrm{e}^{2a})^2} = \sqrt{2\mathrm{e}^{4a} - 8\mathrm{e}^{2a} + 4}$ 1
- Uit $AD + BE = CF$ volgt $\sqrt{2} + \sqrt{\mathrm{e}^{2a} - 4\mathrm{e}^a + 2} = \sqrt{2\mathrm{e}^{4a} - 8\mathrm{e}^{2a} + 4}$ 1
- Dit geeft $2\sqrt{2\mathrm{e}^{2a} - 8\mathrm{e}^a + 4} = 2\mathrm{e}^{4a} - 9\mathrm{e}^{2a} + 4\mathrm{e}^a$ 1
- Kwadrateren geeft $8\mathrm{e}^{2a} - 32\mathrm{e}^a + 16 = \left(2\mathrm{e}^{4a} - 9\mathrm{e}^{2a} + 4\mathrm{e}^a\right)^2$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $a = \ln(2)$ 1

of

- Het inzicht dat het volstaat de afstanden van A, B en C tot de lijn l met vergelijking $y = x$ te bekijken (ofwel dat geldt: $\mathrm{d}(A,l) + \mathrm{d}(B,l) = \mathrm{d}(C,l)$) 1
- $\mathrm{d}(A,l) = \dfrac{|0-1|}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{d}(B,l) = \dfrac{|1-\mathrm{e}^a|}{\sqrt{2}}$ en $\mathrm{d}(C,l) = \dfrac{|2-\mathrm{e}^{2a}|}{\sqrt{2}}$ 1
- Uit $\mathrm{d}(A,l) + \mathrm{d}(B,l) = \mathrm{d}(C,l)$ volgt $1 + |1 - \mathrm{e}^a| = |2 - \mathrm{e}^{2a}|$ 1
- Het inzicht dat de vergelijking $1 - 1 + \mathrm{e}^a = -2 + \mathrm{e}^{2a}$ opgelost moet worden 1
- Herleiden tot $\mathrm{e}^{2a} - \mathrm{e}^a - 2 = 0$ 1
- Dit geeft $(\mathrm{e}^a + 1)(\mathrm{e}^a - 2) = 0$ 1
- Dus $a = \ln(2)$ ($\mathrm{e}^a = -1$ geeft geen oplossing) 1

Een hoek van 45 graden

17 maximumscore 6

- Voor de coördinaten van Q geldt: $a^2 + b^2 = 125$ — 1
- $\cos\angle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ}) = \dfrac{9a + 27b}{9\sqrt{10} \cdot 5\sqrt{5}}$ — 1
- Hieruit volgt $\dfrac{9a + 27b}{9\sqrt{10} \cdot 5\sqrt{5}} = \dfrac{1}{2}\sqrt{2}$ — 1
- Herleiden tot $a + 3b = 25$ — 1
- Het stelsel $\begin{cases} a + 3b = 25 \\ a^2 + b^2 = 125 \end{cases}$ geeft $b^2 - 15b + 50 = 0$ (of $a^2 - 5a - 50 = 0$) — 1
- De mogelijke coördinaten van Q zijn $(-5, 10)$ en $(10, 5)$ — 1

of

- Voor de coördinaten van Q geldt: $a^2 + b^2 = 125$ — 1
- Noem de mogelijke punten Q_1 en Q_2; als $\overrightarrow{OQ_1} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dan $\overrightarrow{OQ_2} = \begin{pmatrix} b \\ -a \end{pmatrix}$ — 1
- $\overrightarrow{Q_1Q_2} = \begin{pmatrix} -a + b \\ -a - b \end{pmatrix}$ — 1
- $\begin{pmatrix} -a + b \\ -a - b \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 \\ 27 \end{pmatrix} = 0$ geeft $b = -2a$ — 1
- Het stelsel $\begin{cases} b = -2a \\ a^2 + b^2 = 125 \end{cases}$ geeft $a^2 = 25$ — 1
- De mogelijke coördinaten van Q zijn $(-5, 10)$ en $(10, 5)$ — 1

of

- $\tan(\angle P) = 3$ (met $\angle P$ de hoek tussen $\overrightarrow{OP}$ en de positieve x-as) dus $\angle P = 71{,}5...$ (°) — 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door O en Q (met Q in het eerste kwadrant) is $\tan(\angle P - 45°) = 0{,}5$ — 1
- Dit geeft $b = 2a$ (dus de coördinaten van Q zijn $(a, 2a)$ met $a > 0$) — 1
- Dit combineren met $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = 5\sqrt{5}$ geeft als eerste mogelijkheid $(10, 5)$ — 1
- Beide mogelijkheden voor $\overrightarrow{OQ}$ staan loodrecht op elkaar, dus de richtingscoëfficiënt voor de andere mogelijke lijn door O en Q is –2 (of: $\tan(\angle P + 45°) = -2$) — 1
- Dit combineren met $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = 5\sqrt{5}$ geeft als tweede mogelijkheid $(-5, 10)$ — 1

of

- P ligt op de lijn met vectorvoorstelling $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ — 1
- S is de loodrechte projectie van Q op deze lijn, dan geldt (omdat OQS een gelijkbenige rechthoekige driehoek is en $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = 5\sqrt{5}$) dat $\left|\overrightarrow{OS}\right| = 2\frac{1}{2}\sqrt{10}$ en dus geldt $t = 2\frac{1}{2}$ — 1
- Dus $\overrightarrow{OS} = \begin{pmatrix} 2\frac{1}{2} \\ 7\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{OS}_L = \begin{pmatrix} -7\frac{1}{2} \\ 2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ — 1
- $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OS}_L = \begin{pmatrix} -5 \\ 10 \end{pmatrix}$
  (dus mogelijke coördinaten van Q zijn $(-5, 10)$) — 1
- $\overrightarrow{OS}_R = \begin{pmatrix} 7\frac{1}{2} \\ -2\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ — 1
- $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{OS}_R = \begin{pmatrix} 10 \\ 5 \end{pmatrix}$ (dus mogelijke coördinaten van Q zijn $(10, 5)$) — 1

of

- De richtingsvector van de lijn door O en Q is $\begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}$ (voor zekere waarde van q) — 1
- $\cos(\angle(\overrightarrow{OP}, \overrightarrow{OQ})) = \dfrac{\begin{pmatrix} 9 \\ 27 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}}{\sqrt{810} \cdot \sqrt{1+q^2}}$ ofwel $\frac{1}{2}\sqrt{2} = \dfrac{9+27q}{\sqrt{810} \cdot \sqrt{1+q^2}}$ — 1
- Dit herleiden tot $2q^2 + 3q - 2 = 0$ — 1
- Dit geeft $q = 0,5$ ($q = -2$ voldoet niet) — 1
- De richtingsvector van de lijn door O en Q is $\begin{pmatrix} 1 \\ 0,5 \end{pmatrix}$; dit combineren met $\left|\overrightarrow{OQ}\right| = 5\sqrt{5}$ geeft als eerste mogelijke coördinaten van Q $(-5, 10)$ (of $(10, 5)$) — 1
- De andere mogelijke coördinaten van Q zijn $(10, 5)$ (of $(-5, 10)$) — 1

5 Aanleveren scores

Verwerk de scores van alle kandidaten per examinator in de applicatie Wolf.
Accordeer deze gegevens voor Cito uiterlijk op 26 juni.

6 Bronvermeldingen

alle figuren	Stichting Cito Instituut voor Toetsontwikkeling, 2024