

Aantal stemmen per liedje

De Top 2000 is een jaarlijks terugkerend radioprogramma. Mensen kunnen vooraf stemmen op liedjes. De 2000 populairste liedjes worden achter elkaar gedraaid. Alleen de aantallen stemmen op het liedje op positie 1 en het liedje op positie 2000 worden openbaar gemaakt. Men vermoedt dat de volgende formule een goede schatting geeft voor het aantal stemmen op een liedje in de ranglijst:

$$S = \frac{E}{1 + \frac{E(N-1)}{2000 \cdot L}} \text{ voor } N = 1, 2, 3, \dots, 2000 \quad (\text{formule 1})$$

Hierin is:

- N de positie in de ranglijst;
- S het geschatte aantal stemmen op het liedje dat op positie N in de ranglijst staat;
- E het werkelijke aantal stemmen op het liedje dat op positie 1 in de ranglijst staat;
- L het werkelijke aantal stemmen op het liedje dat op positie 2000 in de ranglijst staat.

Met formule 1 kun je een schatting maken van het aantal stemmen op het liedje dat op positie 1 in de ranglijst staat.

- 2p **9** Laat zien dat dit geschatte aantal overeenkomt met het werkelijke aantal stemmen op dit liedje.

Het liedje met de meeste stemmen komt op positie 1, het liedje dat daarna de meeste stemmen heeft, komt op positie 2, enzovoort. Logischerwijs zou dus het geschatte aantal stemmen S op een liedje lager moeten worden naarmate N groter wordt.

- 3p **10** Laat met een redenering zien dat formule 1 deze eigenschap heeft.

Voor de Top 2000 van 2006 geldt:

- het liedje op positie 1 had 10 000 stemmen;
- het liedje op positie 2000 had 150 stemmen.

Hiermee kan formule 1 herleid worden tot:

$$S = \frac{300\,000}{N + 29} \quad (\text{formule 2})$$

4p **11** Geef deze herleiding.

Over de Top 2000 van 2006 is meer bekend dan gebruikelijk: er zijn in totaal 1,5 miljoen stemmen uitgebracht.

3p **12** Bereken hoeveel procent van de stemmen in totaal op de top 3 van deze Top 2000 is uitgebracht volgens formule 2. Geef je antwoord in hele procenten.

Omdat het aantal stemmen per liedje normaal gesproken niet openbaar gemaakt wordt, vraagt men zich af wat men bij de Top 2000 doet als een liedje precies evenveel stemmen krijgt als een ander liedje.

Als we met formule 2 het geschatte aantal stemmen per liedje berekenen en dat vervolgens afronden op een geheel getal, dan kan het zijn dat er na afronding liedjes zijn die evenveel stemmen hebben gekregen.

3p **13** Bereken hoeveel liedjes er in de Top 2000 van 2006 zijn die volgens formule 2 na afronding 200 stemmen zouden hebben gekregen.