

## Groeimodellen

In de 18e eeuw werd algemeen aangenomen dat de toename van een populatie dieren kan worden beschreven met behulp van een meetkundige rij. Een model uit die tijd is:

$$\begin{cases} P_n = r \cdot P_{n-1} \\ P_0 = c \end{cases} \quad \text{model 1}$$

In dit model geldt:

- $P_n$  is de **populatiefractie** na  $n$  jaar. Dat is de grootte van de populatie als deel van de maximale populatie.  $P_n$  is dus een getal tussen 0 en 1.
- $c$  is de **startpopulatiefractie**. Ook dit getal wordt uitgedrukt als een deel van de maximale populatie (en dus geldt  $0 < c < 1$ ).
- $r$  is de **reproductiefactor**: een getal dat aangeeft hoe snel een populatie zich per jaar uitbreidt.

Neem aan dat in een bepaald bosrijk gebied een populatie van 165 vossen leeft. De reproductiefactor van de vossen in dit gebied is 1,28 en in het gebied is plaats voor maximaal 500 vossen.

- 3p 7 Bereken met behulp van model 1 na hoeveel jaar dit maximale aantal bereikt zal zijn.

In model 1 wordt ervan uitgegaan dat een populatie altijd even snel groeit. Dit komt echter niet overeen met de werkelijkheid: als de populatie groeit wordt de ruimte per dier namelijk steeds kleiner, waardoor het moeilijker wordt om voedsel te vinden. Hierdoor zal een populatie steeds minder snel gaan groeien naarmate deze toeneemt.

Een verbeterde versie van model 1 is het **logistische model**:

$$\begin{cases} P_n = r \cdot P_{n-1} \cdot (1 - P_{n-1}) \\ P_0 = c \end{cases} \quad \text{model 2}$$

De variabelen in dit model hebben dezelfde betekenis als in model 1.

De Oostvaardersplassen is een natuurgebied in de buurt van Lelystad. In 2020 leefden er in dit gebied een groot aantal edelherten. Door dit grote aantal konden andere diersoorten, voornamelijk vogels, zich niet meer goed ontwikkelen. Mede daarom wordt sinds 2021 de populatie door het afschieten van de dieren stabiel gehouden op 500 edelherten.

Neem aan dat er maximaal 2000 edelherten in de Oostvaardersplassen kunnen leven. Er geldt vanaf 2021 dat  $r = 1,58$  en  $c = 0,25$ .

- 3p **8** Bereken met behulp van model 2 hoeveel edelherten er in de periode 2021-2023 bij zouden komen als er geen dieren zouden worden afgeschoten.

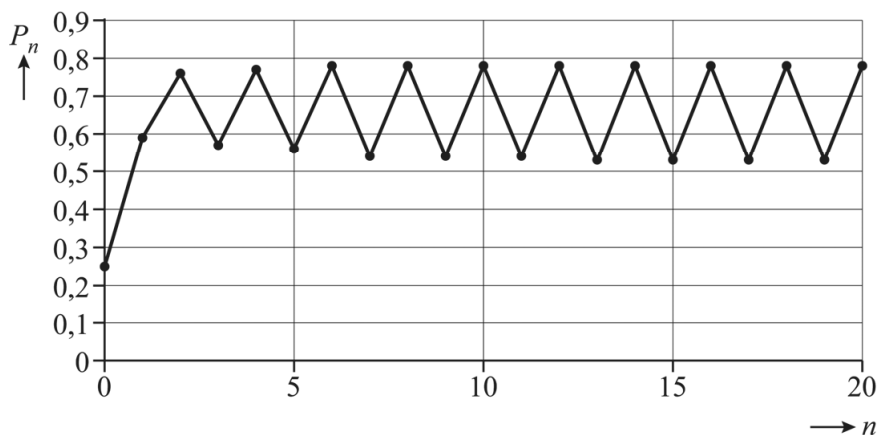
In de rest van deze opgave gaan we bekijken hoe model 2 zich gedraagt bij verschillende waarden van  $r$ .

Als je voor  $r$  een getal tussen de 0 en 1 invult, dan nadert  $P_n$  voor iedere startwaarde  $c$  (met  $0 < c < 1$ ) naar 0. Je kunt dat beredeneren met de formule voor  $P_n$ .

- 3p **9** Geef een redenering waaruit blijkt dat wanneer  $r$  tussen de 0 en 1 is,  $P_n$  altijd naar 0 nadert.

Voor waarden van  $r$  groter dan 1 wordt het model erg onvoorspelbaar.

**figuur**



In de figuur is de grafiek getekend voor  $r = 3,15$  en  $c = 0,25$ . Er is te zien dat de waarde van  $P_n$  op den duur heen en weer gaat springen tussen twee vaste waarden.

- 3p **10** Onderzoek tussen welke twee waarden  $P_n$  heen en weer gaat springen voor  $r = 3,15$  en  $c = 0,25$ . Geef deze waarden in twee decimalen.