

Gebroken goniometrische functie

10 maximumscore 6

- De vergelijking $\frac{\cos(x)}{-\sin^2(x)} = \sqrt{2}$ moet worden opgelost 1
- $\frac{\cos(x)}{\cos^2(x)-1} = \sqrt{2}$ 1
- Hieruit volgt $\sqrt{2} \cdot \cos^2(x) - \cos(x) - \sqrt{2} = 0$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking exact opgelost kan worden 1
- Dit geeft $\cos(x) = -\frac{1}{2}\sqrt{2}$ ($\cos(x) = \sqrt{2}$ heeft geen oplossingen) 1
- Hieruit volgt dat de x -coördinaten van A en B $\frac{3}{4}\pi$ en $\frac{5}{4}\pi$ zijn 1

11 maximumscore 6

- De teller en de noemer moeten (voor dezelfde waarde van x) gelijk zijn aan 0 1
- De teller is 0 als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ 1
- Voor al deze waarden van x geldt: $\sin^2(x) = 1$ 1
- (Voor al deze waarden van x geldt:) de noemer is 0 als $p = 1$ 1
- $f_1(x) = \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$ 1
- $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} f_1(x)$ (en de limiet voor de andere waarden van x) bestaat niet, dus de grafiek van f_1 heeft geen perforatie (dus er is geen waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft) 1

of

- De teller en de noemer moeten (voor dezelfde waarde van x) gelijk zijn aan 0 1
- De teller is 0 als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ 1
- Voor al deze waarden van x geldt: $\sin^2(x) = 1$ 1
- (Voor al deze waarden van x geldt:) de noemer is 0 als $p = 1$ 1
- De onderbouwde constatering dat de grafiek van f_1 bij $x = \frac{1}{2}\pi$ (en voor de andere waarden van x) een verticale asymptoot heeft 1
- Dus de grafiek van f_1 heeft geen perforatie (dus er is geen waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft) 1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> De teller en de noemer moeten (voor dezelfde waarde van x) gelijk zijn aan 0 	1
	<ul style="list-style-type: none"> De noemer is 0 als $\sin^2(x) = p$; dan geldt $\cos^2(x) = 1 - p$, dus $\cos(x) = \pm\sqrt{1-p}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> De teller is voor zo'n waarde van x gelijk aan 0 als $p = 1$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $f_1(x) = \frac{\cos(x)}{1 - \sin^2(x)} = \frac{\cos(x)}{\cos^2(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $\cos(x) = 0$ als $x = \frac{1}{2}\pi + k \cdot \pi$ 	1
	<ul style="list-style-type: none"> $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}\pi} f_1(x)$ (en de limiet voor de andere waarden van x) bestaat niet, dus de grafiek van f_1 heeft geen perforatie (dus er is geen waarde van p waarvoor de grafiek van f_p een perforatie heeft) 	1

Opmerking

Als de kandidaat de functies f_p niet op hun hele domein beschouwt en bij het oplossen van $\cos(x) = 0$ bijvoorbeeld alleen de oplossing $x = \frac{1}{2}\pi$ gebruikt, voor deze vraag hoogstens 5 scorepunten toekennen.

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

12 maximumscore 4

• De punten zijn $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$ 1

• De richtingscoëfficiënt van PQ is $-\frac{2}{p\pi}$ en van QR $\frac{2}{p\pi}$ 1

• PQ en QR staan loodrecht op elkaar als $-\frac{2}{p\pi} \cdot \frac{2}{p\pi} = -\frac{4}{p^2\pi^2} = -1$ 1

• Hieruit volgt $p = -\frac{2}{\pi}$ of $p = \frac{2}{\pi}$ 1

of

• De punten zijn $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$ 1

• $\overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} \pi \\ -\frac{2}{p} \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{QR} = \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix}$ 1

• \overrightarrow{PQ} en \overrightarrow{QR} staan loodrecht op elkaar als $\begin{pmatrix} \pi \\ -\frac{2}{p} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \pi \\ \frac{2}{p} \end{pmatrix} = \pi^2 - \frac{4}{p^2} = 0$ 1

• Hieruit volgt $p = -\frac{2}{\pi}$ of $p = \frac{2}{\pi}$ 1

of

• De punten zijn $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$ 1

• Omdat driehoek PQR symmetrisch is ten opzichte van de verticale lijn door Q en $x_Q - x_P = \pi$, staan PQ en QR loodrecht op elkaar als ook

$$|y_P - y_Q| = \pi \quad 1$$

• Dus als $\left(\left|\frac{1}{p} - -\frac{1}{p}\right|\right) = \left|\frac{2}{p}\right| = \pi$ 1

• Hieruit volgt $p = -\frac{2}{\pi}$ of $p = \frac{2}{\pi}$ 1

of

• De punten zijn $P\left(0, \frac{1}{p}\right)$, $Q\left(\pi, -\frac{1}{p}\right)$ en $R\left(2\pi, \frac{1}{p}\right)$ 1

• De lengte van PQ en van QR is $\sqrt{\pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2}$ (of het kwadraat is $\pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2$) 1

• PQ en QR staan loodrecht op elkaar als $\pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2 + \pi^2 + \left(\frac{2}{p}\right)^2 = (2\pi)^2$,
dus als $\pi^2 = \frac{4}{p^2}$ 1

• Hieruit volgt $p = -\frac{2}{\pi}$ of $p = \frac{2}{\pi}$ 1