Een vierkant en vier vectoren

8 maximumscore 6

- $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 1
- $\cos\left(\angle PCA\right) = \dfrac{\begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}$ 1
- Dit is gelijk aan $\dfrac{p+1}{\sqrt{p^2+1} \cdot \sqrt{2}}$ 1
- ($\overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \end{pmatrix}$ dus) (p vervangen door $\frac{1}{p}$ geeft)

  $\cos\left(\angle ACQ\right) = \dfrac{\frac{1}{p}+1}{\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1} \cdot \sqrt{2}}$ 1
- Teller en noemer van $\dfrac{\frac{1}{p}+1}{\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1} \cdot \sqrt{2}}$ vermenigvuldigen met p geeft

  $\dfrac{1+p}{\sqrt{p^2} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1} \cdot \sqrt{2}}$ 1
- Dit is gelijk aan $\dfrac{1+p}{\sqrt{1+p^2} \cdot \sqrt{2}}$, (dus $\cos\left(\angle ACQ\right) = \cos\left(\angle PCA\right)$,) dus (in deze situatie) $\angle ACQ = \angle PCA$ (dus de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ is gelijk aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$) 1

of

- $\overrightarrow{CP} = \begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\overrightarrow{CA} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ 1
- $\cos(\angle PCA) = \dfrac{\begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} p \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right|}$ 1
- Dit is gelijk aan $\dfrac{p+1}{\sqrt{p^2+1} \cdot \sqrt{2}}$ 1
- ($\overrightarrow{CQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{p} \\ -1 \end{pmatrix}$ dus) (p vervangen door $\frac{1}{p}$ geeft)

  $\cos(\angle ACQ) = \dfrac{\frac{1}{p}+1}{\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1} \cdot \sqrt{2}}$ 1
- Gelijkstellen van beide uitdrukkingen en vervolgens kruislings vermenigvuldigen geeft (dat bewezen moet worden:)
  $\sqrt{p^2}\sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1} + \sqrt{\left(\frac{1}{p}\right)^2+1} = \sqrt{\frac{1}{p^2}}\sqrt{p^2+1} + \sqrt{p^2+1}$ 1
- Dit geeft $\sqrt{1+p^2} + \sqrt{\frac{1}{p^2}+1} = \sqrt{1+\frac{1}{p^2}} + \sqrt{p^2+1}$, (en dit is inderdaad aan elkaar gelijk, dus $\cos(\angle ACQ) = \cos(\angle PCA)$,) dus (in deze situatie) $\angle ACQ = \angle PCA$ (dus de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ is gelijk aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$) 1

of

- De richtingscoëfficiënt van de lijn door C en Q is $\dfrac{-1}{\frac{1}{p}} = -p$ 1
- Het snijpunt R van de lijn door C en Q en lijnstuk AB heeft dus y-coördinaat $1-p$ 1
- $PA = 1-p$, dus $PA = RA$ 1
- $\angle PAC = \angle RAC$ $(= 45°)$ (want AC is een diagonaal van een vierkant) 1
- Ook geldt $CA = CA$, dus ΔCAP is gelijkvormig met ΔCAR 1
- Uit deze gelijkvormigheid volgt dat $\angle ACQ =$ $(\angle ACR =)$ $\angle ACP$ (dus de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ is gelijk aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$) 1

of

- $\dfrac{OC}{OP} = \dfrac{1}{p}$ 1
- $\dfrac{OQ}{OC} = \dfrac{\frac{1}{p}}{1} = \dfrac{1}{p}$ 1
- Ook geldt $\angle POC = \angle COQ$, dus ΔOPC is gelijkvormig met ΔOCQ 1
- $\angle OQC = \angle BCQ$ (*Z*-hoeken), dus $\angle OCP = \angle OQC = \angle BCQ$ 1
- $\angle ACP = 45° - \angle OCP$ en $\angle QCA = 45° - \angle BCQ$ 1
- Dus $\angle ACP = \angle QCA$ (dus de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CP}$ en $\overrightarrow{CA}$ is gelijk aan de hoek tussen de vectoren $\overrightarrow{CA}$ en $\overrightarrow{CQ}$) 1

9 maximumscore 7

- De coördinaten van M zijn $\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 1
- $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{QM} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$ 1
- $\overrightarrow{PB}$ staat loodrecht op $\overrightarrow{QM}$ als $\begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 0$ 1
- De vergelijking $(1-p)\cdot\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right) + 1\cdot\frac{1}{2} = 0$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $p \approx 0{,}54$ (want $0 < p < 1$) 1

of

- De richtingscoëfficiënt van de lijn door P en B is $\dfrac{1}{1-p}$ 1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door M loodrecht op PB is $p-1$ 1
- De coördinaten van M zijn $\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 1
- Hieruit volgt dat een vergelijking van de lijn door M loodrecht op PB is $y = (p-1)x - \frac{1}{2}p^2 + 1$ 1
- Deze lijn gaat door Q als $0 = (p-1)\cdot\frac{1}{p} - \frac{1}{2}p^2 + 1$ 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $p \approx 0{,}54$ (want $0 < p < 1$) 1

of

- In dit geval is de lijn door M en Q de middelloodlijn van lijnstuk PB 2
- (Omdat Q op deze middelloodlijn ligt, geldt) $PQ = BQ$ 1
- $PQ = \frac{1}{p} - p$ en $AQ = \frac{1}{p} - 1$ 1
- $BQ = \sqrt{\left(\frac{1}{p} - 1\right)^2 + 1}$ 1
- Beschrijven hoe de vergelijking $\frac{1}{p} - p = \sqrt{\left(\frac{1}{p} - 1\right)^2 + 1}$ kan worden opgelost 1
- $p \approx 0{,}54$ (want $0 < p < 1$) 1

of

- De coördinaten van M zijn $\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 1
- $PM^2 = \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - p\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ 1
- $QM^2 = \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$ 1
- $PQ^2 = \left(\frac{1}{p} - p\right)^2$ 1
- De vergelijking $\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - p\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{p} - p\right)^2$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $p \approx 0{,}54$ (want $0 < p < 1$) 1

of

- De coördinaten van M zijn $\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ 1
- $\overrightarrow{PB} = \begin{pmatrix} 1-p \\ 1 \end{pmatrix}$ 1
- Een vergelijking van een normaalvector van $\overrightarrow{PB}$ is $(1-p)x + y = c$ 1
- Invullen van $Q\left(\frac{1}{p}, 0\right)$ geeft voor de normaalvector door Q dat $(1-p) \cdot \frac{1}{p} = c$ 1
- De normaalvector moet door M gaan, dus er moet gelden $(1-p) \cdot \left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = (1-p) \cdot \frac{1}{p}$ (en deze vergelijking moet worden opgelost) 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $p \approx 0{,}54$ (want $0 < p < 1$) 1

of

- Er moet gelden $PQ \cdot AB = PB \cdot QM$ 1
- $PQ = \frac{1}{p} - p$ (en $AB = 1$) 1
- $PB = \sqrt{(1-p)^2 + 1}$ 1
- $QM = \sqrt{\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ 1
- De vergelijking $\left(\frac{1}{p} - p\right) \cdot 1 = \sqrt{(1-p)^2 + 1} \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{2}p + \frac{1}{2} - \frac{1}{p}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2}$ moet worden opgelost 1
- Beschrijven hoe deze vergelijking kan worden opgelost 1
- $p \approx 0{,}54$ (want $0 < p < 1$) 1

Opmerking
In het derde antwoordalternatief mogen voor het eerste antwoordelement uitsluitend 0 of 2 scorepunten worden toegekend.

Limiet van een verhouding

10 maximumscore 4

- $t^2 = a$ geeft $t = -\sqrt{a}$ of $t = \sqrt{a}$ 1
- $y_S = y\left(-\sqrt{a}\right) = a + 2\sqrt{a}$ en $y_R = y\left(\sqrt{a}\right) = a - 2\sqrt{a}$ 1
- $\frac{QR}{QS} = \frac{a - 2\sqrt{a}}{a + 2\sqrt{a}} = \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{a}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{a}}}$ 1
- ($\frac{2}{\sqrt{a}}$ nadert naar 0 als a onbegrensd toeneemt, dus) de limiet is 1 (of $\lim\limits_{a \to \infty} \frac{1 - \frac{2}{\sqrt{a}}}{1 + \frac{2}{\sqrt{a}}} = 1$) 1