

## Bissectrice in een rechthoek

### 15 maximumscore 5

- Een vergelijking van  $AC$  is  $x + 2y = 8$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een vergelijking van  $PF$  is  $x - 2y = 4$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Dan volgt dat de coördinaten van  $D$   $(6, 1)$  zijn 1
- $\overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$  en  $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  1

$$\cos(\angle(\overrightarrow{EP}, \overrightarrow{EF})) = \frac{\begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{6}{\sqrt{52}} = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ en}$$

$$\cos(\angle(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF})) = \frac{\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}}{\left| \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| \cdot \left| \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right|} = \frac{3}{\sqrt{13}} \text{ (dus } \angle(\overrightarrow{EP}, \overrightarrow{EF}) = \angle(\overrightarrow{ED}, \overrightarrow{EF}))$$

waaruit volgt dat de lijn door  $E$  en  $F$  de bissectrice is van hoek  $PED$ ) 1

of

- Een vergelijking van  $AC$  is  $x + 2y = 8$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- Een vergelijking van  $PF$  is  $x - 2y = 4$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
- De coördinaten van  $D$  zijn  $(6, 1)$  1
- $\overrightarrow{EP} = \begin{pmatrix} -4 \\ -6 \end{pmatrix}$  en  $\overrightarrow{ED} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$  1
- Dus de lijn door  $E$  en  $P$  en de lijn door  $E$  en  $D$  zijn elkaars beeld bij spiegelen in de lijn  $EF$ , dus de lijn door  $E$  en  $F$  is de bissectrice van hoek  $PED$  1

of

Vraag	Antwoord	Scores
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Een vergelijking van <math>AC</math> is <math>x + 2y = 8</math> (of een gelijkwaardige uitdrukking)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Een vergelijking van <math>PF</math> is <math>x - 2y = 4</math> (of een gelijkwaardige uitdrukking)</li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De coördinaten van <math>D</math> zijn <math>(6, 1)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li><math>\angle PEF = \angle EPC</math> (Z-hoeken) dus <math>\tan(\angle PEF) = \tan(\angle EPC) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>In driehoek <math>D'ED</math> (met <math>D'</math> de loodrechte projectie van <math>D</math> op <math>EF</math>) geldt: <math>\tan(\angle D'ED) = \frac{D'D}{D'E} = \frac{2}{3}</math> (dus <math>\angle D'ED = \angle PEF</math> waaruit volgt dat de lijn door <math>E</math> en <math>F</math> de bissectrice is van hoek <math>PED</math>)</li> </ul>	1
	of	
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Uit de gelijkvormigheid van driehoek <math>AOC</math> met driehoek <math>FOP</math> volgt dat driehoek <math>CPD</math> gelijkbenig is, dus <math>DC = DP</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>Hieruit volgt <math>y_D = \frac{-2 + 4}{2} = 1</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>De coördinaten van <math>D</math> zijn <math>(6, 1)</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>In driehoek <math>P'EP</math> (met <math>P'</math> de loodrechte projectie van <math>P</math> op het verlengde van <math>EF</math>) geldt: <math>\tan(\angle P'EP) = \frac{P'P}{P'E} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}</math></li> </ul>	1
	<ul style="list-style-type: none"> <li>In driehoek <math>D'ED</math> (met <math>D'</math> de loodrechte projectie van <math>D</math> op <math>EF</math>) geldt: <math>\tan(\angle D'ED) = \frac{D'D}{D'E} = \frac{2}{3}</math> (dus <math>\angle D'ED = \angle P'EP</math> waaruit volgt dat de lijn door <math>E</math> en <math>F</math> de bissectrice is van hoek <math>PED</math>)</li> </ul>	1

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

**16 maximumscore 6**

- Een vergelijking van  $c$  is  $(x-4)^2 + (y-2)^2 = 4$  en een vergelijking van  $AC$  is  $y = -\frac{1}{2}x + 4$  1
  - $c$  snijden met  $AC$  geeft  $(x-4)^2 + (-\frac{1}{2}x+2)^2 = 4$  dus  $1\frac{1}{4}x^2 - 10x + 16 = 0$  1
  - Dit geeft  $D(4 + \frac{4}{5}\sqrt{5}, 2 - \frac{2}{5}\sqrt{5})$  1
  - Driehoek  $FDD''$  (met  $D''$  de loodrechte projectie van  $D$  op  $OA$ ) is gelijkvormig met driehoek  $FPO$  dus  $\frac{PO}{FO} = \frac{DD''}{FD''}$  1
  - Dit geeft  $\frac{-p}{4} = \frac{2 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}{\frac{4}{5}\sqrt{5}}$  ofwel  $\frac{-p}{4} = \frac{2\sqrt{5} - 2}{4}$  1
  - Dus  $p = 2 - 2\sqrt{5}$  1
- of
- Een vergelijking van  $PF$  is  $y = -\frac{1}{4}px + p$  (of een gelijkwaardige uitdrukking) 1
  - Punt  $D$  is het snijpunt van  $AC$  met  $PF$ , dus moet gelden  $-\frac{1}{4}px + p = -\frac{1}{2}x + 4$  1
  - Dit geeft  $D\left(\frac{4p-16}{p-2}, \frac{2p}{p-2}\right)$  1
  - $MD = 2$  dus  $\left(\frac{4p-16}{p-2} - 4\right)^2 + \left(2 - \frac{2p}{p-2}\right)^2 = 2^2$  1
  - Herleiden tot (bijvoorbeeld)  $\frac{64}{(p-2)^2} + \frac{16}{(p-2)^2} = 4$  1
  - $p = 2 - \sqrt{20}$  ( $p = 2 + \sqrt{20}$  voldoet niet) 1
- of
- $rc_{ED} = -rc_{EP} = -\frac{4-p}{4} = \frac{p-4}{4}$  1
  - $rc_{PF} = \frac{-p}{4}$  1
  - Punt  $M$  is het midden van  $EF$ , dus  $EF$  is de middellijn van de cirkel 1
  - $D$  ligt op de cirkel, dus geldt  $\angle FDE = 90^\circ$  1
  - Er moet dus gelden dat  $rc_{ED} \cdot rc_{PF} = \frac{p-4}{4} \cdot \frac{-p}{4} = -1$  1
  - Dan volgt  $p = 2 - \sqrt{20}$  ( $p = 2 + \sqrt{20}$  voldoet niet) 1
- of

Vraag	Antwoord	Scores
-------	----------	--------

- Driehoek  $AOC$  is gelijkvormig met driehoek  $DD'M$  (met  $D'$  de loodrechte projectie van  $D$  op  $EF$ ), dus  $\frac{AO}{AC} = \frac{DD'}{DM}$  en  $\frac{CO}{CA} = \frac{MD'}{MD}$  1
- $DM = 2$  en  $AC = \sqrt{80}$  geeft  $D'M = \frac{2}{5}\sqrt{5}$  en  $D'D = \frac{4}{5}\sqrt{5}$  1
- $D\left(4 + \frac{4}{5}\sqrt{5}, 2 - \frac{2}{5}\sqrt{5}\right)$  1
- De richtingscoëfficiënt van de lijn door  $F$  en  $D$  is  $\frac{2 - \frac{2}{5}\sqrt{5}}{\frac{4}{5}\sqrt{5}} = \frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}$  1
- Een vergelijking van de lijn door  $F$  en  $D$  is  $y = \left(\frac{1}{2}\sqrt{5} - \frac{1}{2}\right)(x - 4)$  1
- Het snijpunt met de  $y$ -as is  $P\left(0, 2 - 2\sqrt{5}\right)$  en dus is  $p = 2 - 2\sqrt{5}$  1

of

- Een vectorvoorstelling van  $AC$  is  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$  en een vectorvoorstelling van  $PF$  is  $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ p \end{pmatrix}$  1
- Voor het snijpunt  $D$  geldt:  $\begin{cases} 8 - 2t = 4 - 4v \\ t = p \cdot v \end{cases}$  1
- Hieruit volgt dat voor de coördinaten van  $D$  geldt  $\left(4 + \frac{16}{4 - 2p}, \frac{-4p}{4 - 2p}\right)$  ofwel  $\left(\frac{16 - 4p}{2 - p}, \frac{-2p}{2 - p}\right)$  1
- $MD = 2$  dus  $\left(\frac{16 - 4p}{2 - p} - 4\right)^2 + \left(2 - \frac{-2p}{2 - p}\right)^2 = 2^2$  1
- Herleiden tot (bijvoorbeeld)  $\frac{64}{(2 - p)^2} + \frac{16}{(2 - p)^2} = 4$  1
- $p = 2 - \sqrt{20}$  ( $p = 2 + \sqrt{20}$  voldoet niet) 1