Wachttijden

Een **wachttijd** is de tijd die je op een dienst moet wachten. Denk hierbij bijvoorbeeld aan de tijd die nodig is om een medewerker van een klantenservice aan de telefoon te krijgen of de tijd die nodig is voordat je wordt geholpen bij de bakker.

In 1909 ontwikkelde de Deense wiskundige Agner Erlang een wiskundig model om te berekenen in hoeveel procent van de gevallen bepaalde wachttijden voorkomen. Dit percentage komt overeen met de oppervlakte onder een grafiek.

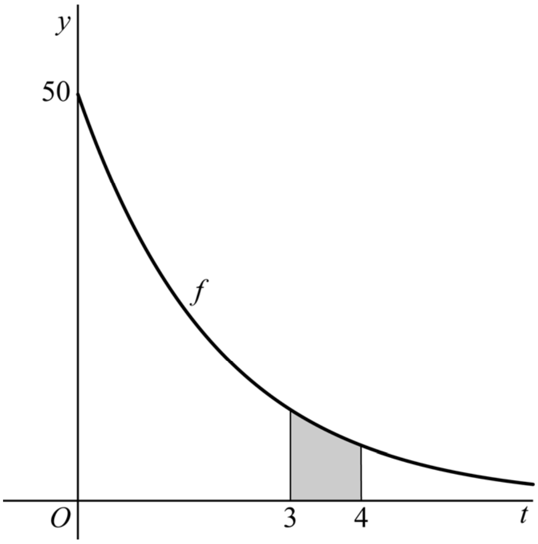
In deze opgave gaan we uit van een dienst waarbij het volgende model van Erlang hoort:

$f(t) = 50\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$ met $t \geq 0$

Hierbij is t de tijd in minuten.

Stel dat je wilt weten in hoeveel procent van de gevallen de wachttijd tussen 3 en 4 minuten ligt. Je bepaalt dan de oppervlakte van het gebied dat wordt ingesloten door de grafiek van f, de t as en de lijnen met vergelijking $t = 3$ en $t = 4$. Deze oppervlakte blijkt (afgerond) 8,8 te zijn. Dit wil zeggen dat in 8,8% van alle gevallen de wachttijd tussen 3 en 4 minuten ligt. Zie de figuur.

figuur



3p **3** Bereken algebraïsch in hoeveel procent van de gevallen de wachttijd tussen 0 en 3 minuten ligt. Geef je eindantwoord in één decimaal.

Een wachttijd van meer dan twintig minuten komt in dit voorbeeld zelden voor. Daarom wordt de **gemiddelde wachttijd** berekend met:

$$\tfrac{1}{100}\cdot\int_0^{20} t\cdot f\left(t\right)\mathrm{d}t$$

Om de gemiddelde wachttijd te kunnen berekenen, maakt iemand gebruik van het gegeven dat $y=\left(\dfrac{1}{a}t-\dfrac{1}{a^2}\right)\mathrm{e}^{at}$ een primitieve is van $y=t\mathrm{e}^{at}$ (met $a\neq 0$).

3p **4** Bewijs dat $y=\left(\dfrac{1}{a}t-\dfrac{1}{a^2}\right)\mathrm{e}^{at}$ inderdaad een juiste primitieve is van $y=t\mathrm{e}^{at}$ voor elke waarde van a (met $a\neq 0$).

4p **5** Bereken algebraïsch de gemiddelde wachttijd in minuten voor de situatie met $f(t)=50\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}$. Geef je eindantwoord als geheel getal.

Verschuiven

De functie f wordt gegeven door $f(x)=(3x-7)^2$.

De grafiek van f wordt naar rechts en omhoog verschoven. Hierdoor ontstaat de grafiek van de functie g.

De grafiek van g gaat door het punt $A\ \left(5, 40\right)$. De helling van de raaklijn in A aan de grafiek van g is -6.

6p **6** Stel op exacte wijze een functievoorschrift van g op.