Cobb-Douglas-productiefunctie

De Cobb-Douglas-productiefunctie is een wiskundig model dat economen gebruiken om de productie Y te voorspellen. In dit model hangt de productie af van twee factoren: **arbeid** en **kapitaal**.
Met arbeid L wordt het aantal voltijdbanen van werknemers bedoeld.
Met kapitaal K wordt in deze opgave het aantal machines bedoeld dat beschikbaar is voor de productie.

De formule bij dit model luidt:

$$Y = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$$

Hierbij zijn A, α en β constanten die afhangen van het soort bedrijf.

Iemand wil € 1 000 000 per jaar investeren in een nieuw bedrijf.

Voor een bedrijf in deze sector geldt $A = 40$, $\alpha = 0,7$ en $\beta = 0,3$.
De kosten per voltijdbaan per jaar bedragen € 50 000 en de kosten per machine per jaar bedragen € 20 000.
Er geldt dus: $50\,000L + 20\,000K = 1\,000\,000$
Uit deze gegevens is af te leiden dat: $Y = 40 \cdot L^{0,7} \cdot (50 - 2,5L)^{0,3}$

2p **3** Toon aan dat $Y = 40 \cdot L^{0,7} \cdot (50 - 2,5L)^{0,3}$.

De investeerder wil het volledige bedrag van € 1 000 000 investeren in arbeid en kapitaal, en wel in zo'n verhouding dat de productie Y maximaal is.

5p **4** Bereken algebraïsch hoeveel voltijdbanen de investeerder moet inzetten om de productie Y maximaal te krijgen.

Als $\beta = 1 - \alpha$ dan spreken economen van een constant schaalvoordeel.
Dat wil zeggen dat de inzet van arbeid en kapitaal evenredig is met de productie. Ofwel: als zowel L als K met dezelfde factor g groeit, dan groeit ook de productie $Y = A \cdot L^{\alpha} \cdot K^{\beta}$ met diezelfde factor g.

4p **5** Bewijs dat bij $\beta = 1 - \alpha$ geldt: als zowel L als K met dezelfde factor g groeit, dan groeit ook de productie Y met diezelfde factor g.