Vraag	Antwoord	Scores

Lijnstukken bij een exponentiële functie

15 maximumscore 5

- Voor de x-coördinaat van het raakpunt geldt $e^{ax} = e$, dus $x = \frac{1}{a}$ — 1
- $f_a'(x) = a \cdot e^{ax}$ — 1
- De helling van de raaklijn is $f_a'(\frac{1}{a}) = a \cdot e^{a \cdot \frac{1}{a}} = ae$ — 1
- Een mogelijke vergelijking van de raaklijn is $y = ae \cdot x + b$; deze gaat door $\left(\frac{1}{a}, e\right)$ dus $e = ae \cdot \frac{1}{a} + b$ — 1
- Dan volgt $b = 0$, dus de lijn gaat voor elke waarde van a door de oorsprong — 1

of

- $f_a'(x) = a \cdot e^{ax}$ — 1
- De x-coördinaat van het raakpunt van de raaklijn door de oorsprong is oplossing van de vergelijking $a \cdot e^{ax} = \frac{e^{ax}}{x}$ — 1
- Hieruit volgt $x = \frac{1}{a}$ — 1
- $f_a(\frac{1}{a}) = e^{a \cdot \frac{1}{a}} = e$ — 1
- Dus de lijn door de oorsprong die raakt aan de grafiek, gaat door het (raak)punt met y-coördinaat e — 1

16 maximumscore 7

- $D(1, 0)$, $E(e^{a}, 1)$ en $F(e^{2a}, 2)$ — 1
- $AD^2 = 2$, $BE^2 = 2(e^{a} - 1)^2$ en $CF^2 = 2(e^{2a} - 2)^2$ — 1
- Dus $AD = \sqrt{2}$, $BE = \sqrt{2}(e^{a} - 1)$ en $CF = \sqrt{2}(e^{2a} - 2)$ — 1
- Uit $AD + BE = CF$ volgt $\sqrt{2} + \sqrt{2}(e^{a} - 1) = \sqrt{2}(e^{2a} - 2)$ — 1
- Herleiden tot $e^{2a} - e^{a} - 2 = 0$ — 1
- Dit geeft $(e^{a} + 1)(e^{a} - 2) = 0$ — 1
- Dus $a = \ln(2)$ ($e^{a} = -1$ geeft geen oplossing) — 1

of

- $D(1, 0)$, $E(\mathrm{e}^a, 1)$ en $F(\mathrm{e}^{2a}, 2)$ 1
- $AD = \sqrt{2}$ en BE is de schuine zijde van een $1-1-\sqrt{2}$-driehoek met rechthoekszijde $\mathrm{e}^a - 1$, dus $BE = \sqrt{2}(\mathrm{e}^a - 1)$ 1
- CF is de schuine zijde van een $1-1-\sqrt{2}$-driehoek met rechthoekszijde $\mathrm{e}^{2a} - 2$, dus $CF = \sqrt{2}(\mathrm{e}^{2a} - 2)$ 1
- Uit $AD + BE = CF$ volgt $\sqrt{2} + \sqrt{2}(\mathrm{e}^a - 1) = \sqrt{2}(\mathrm{e}^{2a} - 2)$ 1
- Herleiden tot $\mathrm{e}^{2a} - \mathrm{e}^a - 2 = 0$ 1
- Dit geeft $(\mathrm{e}^a + 1)(\mathrm{e}^a - 2) = 0$ 1
- Dus $a = \ln(2)$ ($\mathrm{e}^a = -1$ geeft geen oplossing) 1

of

- $D(1, 0)$, $E(\mathrm{e}^a, 1)$ en $F(\mathrm{e}^{2a}, 2)$ 1
- $BE = \sqrt{(\mathrm{e}^a - 1)^2 + (1 - \mathrm{e}^a)^2} = \sqrt{2\mathrm{e}^{2a} - 4\mathrm{e}^a + 2}$ 1
- $CF = \sqrt{(\mathrm{e}^{2a} - 2)^2 + (2 - \mathrm{e}^{2a})^2} = \sqrt{2\mathrm{e}^{4a} - 8\mathrm{e}^{2a} + 4}$ 1
- Uit $AD + BE = CF$ volgt $\sqrt{2} + \sqrt{\mathrm{e}^{2a} - 4\mathrm{e}^a + 2} = \sqrt{2\mathrm{e}^{4a} - 8\mathrm{e}^{2a} + 4}$ 1
- Dit geeft $2\sqrt{2\mathrm{e}^{2a} - 8\mathrm{e}^a + 4} = 2\mathrm{e}^{4a} - 9\mathrm{e}^{2a} + 4\mathrm{e}^a$ 1
- Kwadrateren geeft $8\mathrm{e}^{2a} - 32\mathrm{e}^a + 16 = \left(2\mathrm{e}^{4a} - 9\mathrm{e}^{2a} + 4\mathrm{e}^a\right)^2$ 1
- Een exacte berekening waaruit volgt $a = \ln(2)$ 1

of

- Het inzicht dat het volstaat de afstanden van A, B en C tot de lijn l met vergelijking $y = x$ te bekijken (ofwel dat geldt: $\mathrm{d}(A,l) + \mathrm{d}(B,l) = \mathrm{d}(C,l)$) 1
- $\mathrm{d}(A,l) = \dfrac{|0-1|}{\sqrt{2}}$, $\mathrm{d}(B,l) = \dfrac{|1-\mathrm{e}^a|}{\sqrt{2}}$ en $\mathrm{d}(C,l) = \dfrac{|2-\mathrm{e}^{2a}|}{\sqrt{2}}$ 1
- Uit $\mathrm{d}(A,l) + \mathrm{d}(B,l) = \mathrm{d}(C,l)$ volgt $1 + |1 - \mathrm{e}^a| = |2 - \mathrm{e}^{2a}|$ 1
- Het inzicht dat de vergelijking $1 - 1 + \mathrm{e}^a = -2 + \mathrm{e}^{2a}$ opgelost moet worden 1
- Herleiden tot $\mathrm{e}^{2a} - \mathrm{e}^a - 2 = 0$ 1
- Dit geeft $(\mathrm{e}^a + 1)(\mathrm{e}^a - 2) = 0$ 1
- Dus $a = \ln(2)$ ($\mathrm{e}^a = -1$ geeft geen oplossing) 1