

Padovantafels

Op de foto zie je een zogenoemde Fibonaccitafel van de firma NautaBene Design. Het patroon van het tafelblad is geïnspireerd op de rij van Fibonacci: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, ...

foto



Het tafelblad bestaat uit vier vierkanten en een rechthoekig gat.

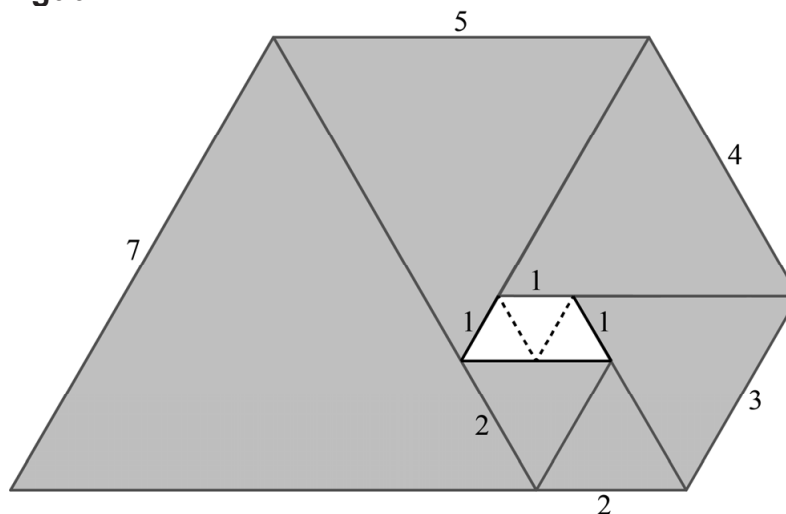
De zijden van de vierkanten verhouden zich als 5 : 8 : 13 : 21.

De tafel is 120 cm lang en 74 cm breed.

- 3p 18 Bereken de afmetingen van het rechthoekige gat. Je mag hierbij de randen om de vierkanten buiten beschouwing laten. Geef je antwoord in een geheel aantal cm.

Behalve de rij van Fibonacci bestaan er ook andere rijen, bijvoorbeeld de rij van Padovan. In figuur 1 zie je het ontwerp voor een Padovantafel. Het tafelblad bestaat uit zes gelijkzijdige driehoeken met zijden van 2, 2, 3, 4, 5 en 7 dm. In het tafelblad zit een gat. Hier zijn drie gelijkzijdige driehoekjes met een zijde van 1 dm weggelaten.

figuur 1



Het patroon van het tafelblad is geïnspireerd op de rij van Padovan, een rij getallen die op de volgende manier beschreven kan worden:

$$\begin{cases} p_1 = 1, p_2 = 1, p_3 = 1 \\ p_n = p_{n-2} + p_{n-3} \end{cases}$$

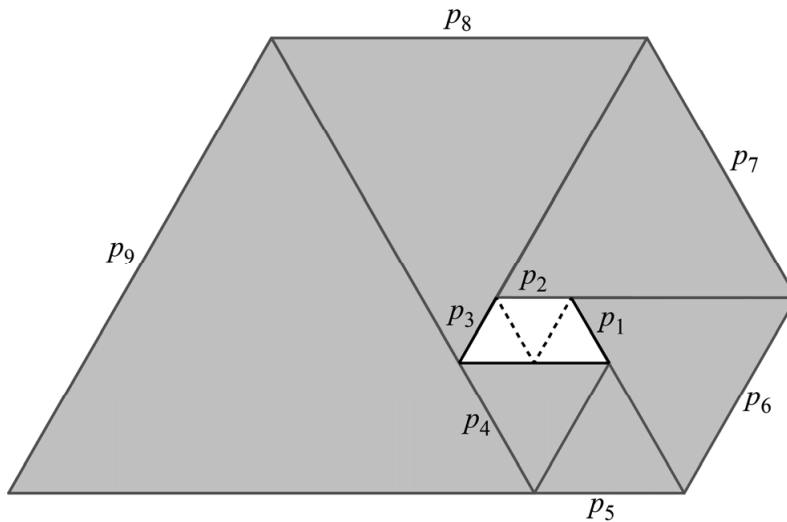
De tweede regel zegt dat $p_4 = p_2 + p_1$, $p_5 = p_3 + p_2$, enzovoort.

Zo ontstaat dus de rij getallen: 1, 1, 1, 2, 2, 3, 4, 5, 7, ...

Deze rij kan nog verder voortgezet worden.

In figuur 2 zie je nogmaals het ontwerp voor de Padovantafel, waarvan p_n de lengte van de zijde van de n -de driehoek is. Bij een zijde van elke driehoek is de bijbehorende term p_n uit de rij van Padovan gezet.

figuur 2



In figuur 2 is te zien dat vanaf p_6 het volgende geldt:

$$p_6 = p_5 + p_1 \quad (1)$$

$$p_7 = p_6 + p_2 \quad (2)$$

$$p_8 = p_7 + p_3 \quad (3)$$

enzovoort.

Blijkbaar kunnen de Padovan-getallen vanaf p_6 ook op deze manier berekend worden.

- 2p **19** Geef een recursieve formule (inclusief startwaarden) die bij deze manier hoort.

Op grond van de formule $p_n = p_{n-2} + p_{n-3}$ aan het begin van deze opgave geldt dus:

$$p_4 = p_2 + p_1 \quad (4)$$

$$p_5 = p_3 + p_2 \quad (5)$$

$$p_6 = p_4 + p_3 \quad (6)$$

- 2p **20** Toon aan, door uit te gaan van de formules 4, 5 en 6, dat geldt: $p_6 = p_5 + p_1$. Doe dit zonder een getallenvoorbeeld te gebruiken.